ANALIZA III - LISTA 2

1. Pokazać, że z równania $4xy^2 - 2xz^5 + 3y^3z^2 = 12$ można obliczyć z jako funkcję od x, y w otoczeniu $(0, 1, 2)$. Obliczyć $(\partial z/\partial x)$ i $(\partial z/\partial y)$ w punkcie $(0, 1)$.

2. Pokazać, że z równania $x^3z^2 - z^3yx = 0$ można obliczyć z jako funkcję od x, y w otoczeniu $(1, 1, 1)$, ale nie w polbliżu $(0, 0, 0)$. Obliczyć $(\partial z/\partial x)$ i $(\partial z/\partial y)$ w punkcie $(1, 1)$.

3. Oblicz pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji uwikłanej $z = z(x, y)$ (czyli wyraź przez x, y, z), gdy

(a) $z^2 = xy$ (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ (c) $\cos(x + y + z) + x + y + z = 0.$

Zastanów się, gdzie to mozna rozwikłać.

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $y = y(x)$ zadanej równaniem

(a) $x^2 + y^2 + 4y = xy + 2x$ (b) $x^3 + y^3 = 12xy$ (c) $x^4 + y^6 + 12x^2y^4 = 0$

5. Sprawdzić czy funkcja $z(x, y)$ zadana niejawnie równaniem $x^2 + 2y^2 + z^2 - z - 6 + xy = 0$ ma ekstremum lokalne w punkcie $(0, 0)$.

6. Pokazać, że powierzchnia jest ogranicznona i znaleźć ekstrema funkcji $z(x, y)$ zadanej niejawnie równaniem: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$

7. Pokazać, że powierzchnia jest ogranicznona i znaleźć ekstrema funkcji $z(x, y)$ zadanej niejawnie równaniem: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2(x^2 + y^2 - z^2) = 0$

**8. Pokazać, że powierzchnia jest ogranicznona i znaleźć ekstrema funkcji $z(x, y)$ zadanej niejawnie równaniem: $5(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = 72$. Jak poradzić sobie z punktami, gdzie z nie można rozwikłać?

9. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej obliczyć dy/dx dla $e^{x+y^2} + y^3 = 0$. Sprawdzić, gdzie się da rozwikłać. Zapisać pochodną w możliwie prostej postaci.

10. Czy istnieje płaszczyzna styczna do wykresu funkcji $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 2y$

(a) równoległa do płaszczyzny $z = x + y$

(b) prostopadła do wektora $(1, 2, 3)$?

11. Znaleźć pierwsze i drugie pochodne czastkowe funkcji $z(x, y)$ w punkcie $x = 1, y = -2, z = 1$ zadanej niejawnie równaniem $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$.

12. Zbadać rozwiązalność układu

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 &= 0 \\ x + z + w + u^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

dla u, v, w jako funkcji od x, y, z w poblizu $x = y = z = 0$, $u = v = 0$ i $w = -2$.

13. Zbadać rozwiązalność układu

$$\begin{aligned} x + y + uv &= 0 \\ uxy + v &= 0 \end{aligned}$$

dla u, v wzgledem x, y w poblizu $x = y = u = v = 0$. Sprawdzić również bezpośrednim rachunkiem.

14. Zbadać czy z układu

$$\begin{aligned} u =& x + xyz \\ v =& y + xy \\ w =& z + 2x + 3z^2 \end{aligned}$$

mozna obliczyć x, y, z względem u, v, w w poblizu $x = y = z = 0$.

15. Niech $f(x, y) = ((x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)), xy/(x^2 + y^2))$, $(x, y) \neq 0$. Czy f jest lokalnie odwracalne w pobliżu $(x, y) = (0, 1)$?

16. Czy można z układu

$$\begin{aligned} xy^2 + xzu + yv^2 &= 3 \\ u^3yz + 2xv - u^2v^2 &= 2 \end{aligned}$$

obliczyć $u(x, y, z)$ i $v(x, y, z)$ w pobliżu $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(u, v) = (1, 1)$? Obliczyć $\partial v/\partial y$ w $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

17. Pokazać, że jeżeli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia $f'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, to f jest $1 - 1$ na $\mathbb{R}$. Określmy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Pokazać, że $\det Df(x, y) \neq 0$ dla wszystkich (x, y), lecz f nie jest $1 - 1$.

18*. Określmy, funkcje $x, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorami $x(r, \theta) = r \cos \theta$ i $y(r, \theta) = r sin\theta$. Pokazac, że

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\Big|_{r_0, \theta_0} = r_0$$

Kiedy można utworzyć C^1 funkcję odwrotną $r(x, y), \theta(x, y)$? Sprawdzić bezpośrednio i z użyciem twierdzenia o funkcji odwrotnej.

19*. Rozważmy przekształcenia dla współrzednych sferycznych w $\mathbb{R}^3$: $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = \rho \sin\varphi sin\theta$, $z = \rho \cos\varphi$. Pokazac, że

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2 \sin\varphi$$

Kiedy możemy wyliczyć (ρ, φ, θ) jako funkcje od (x, y, z)?

20*. Zagadnienie rozkładu wielomianu $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ na czynniki liniowe jest w pewnym sensie zadaniem o funkcji odwrotnej. Wspólczynniki a_i są znanymi funkcjami, zależnymi od pierwiastków r_1, r_2, r_3. Chcemy obliczyć pierwiastki jako funkcje zależne od współczynników. Zastosować twierdzeni eo funkcji odwrotnej i zobaczyć efekt.

21*. Dla $t \in \mathbb{R}$ rozważmy macierz $[a_{ij}(t)]$, której wyrazy są klasy C^1. Założmy, że dla każdego t, $\det[a_{ij}(t)] \neq 0$, a $b_1, ..., b_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są klasy C^1. Niech $s_1, ..., s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem układu równań

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)s_j(t) = b_i(t), \quad i = 1, ..., n.$$

Pokazać bez większych rachunków, że funkcje $s_i(t)$ są klasy C^1.

**22. Określmy funkcję $f(x) = \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x}$, gdy $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Wykorzystać f by pokazać, że z twierdzenia o funkcji odwrotnej nie można wyeliminować ciągłości pochodnej. *Wsk. Wyliczyć f', naszkicować jakościowo wykres funkcji f.*

**23. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1. Pokazać, że nie jest wzajemnie jednoznaczna. Wsk. Rozważyć funcję $g(x, y) = (f(x, y), y)$ lub $g(x, y) = (x, f(x, y))$. Czy to samo zachodzi, gdy f jest określona na zbiorze otwartym? Wtedy pytamy czy może być różnowartościowa.

**24. Rozstrzygnąć analogiczne zagadnienie, gdy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $m < n$, rząd Df jest równy m.

**25. Funkcja $g(t)$ odwzorowuje pewien przedział otwarty $(-a, a)$ w przestrzeń $\mathbb{R}^2$ i jest klasy C^1. Czy jest możliwe by obraz każdego przedziału otwartego $(-b, b)$, gdzie $0 < b < a$ zawierał otoczenie (tzn, zbiór otwarty w $\mathbb{R}^2$) punktu $g(0)$?

**26. Rozstrzygnąć analogiczne zagadnienie, gdy $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ i $m < n$, rząd Df jest równy m.

**27. Udowodnic wzór (2.6) z wykładu.

28*. Udowodnić twierdzenie Lagrange'a 1.33 (przy wielu warunkach) korzystając z wzoru 2.30 z wykładu.