Franciszek Malinka

zad. 1

Oszacujemy najpierw z góry, $|\alpha_j| \leq u$ stąd

$$\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j) \leq \prod_{j=1}^{n}(1+u) = (1+u)^n = 1+\binom{n}{1}u+\binom{n}{2}u^2+\ldots+\binom{n}{n}u^n =$$

$$= 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2!}u^2 + \ldots + \frac{n!}{n!\,0!}u^n =$$

$$= 1 + nu\left(1 + \frac{n-1}{2!}u + \ldots + \frac{(n-1)!}{n!}u^{n-1}\right) \leq$$

$$\leq 1 + nu\left(\underbrace{1 + \frac{nu}{2!} + \frac{n^2u^2}{3!} + \ldots + \frac{(n-1)^n u^{n-1}}{n!}}_{\leq 0.0001}\right) \leq$$

0.0001, bo $nu \leq 0.0001$ a ten ciąg ma każde kolejne wyrazy co najmniej 1000 razy mniejsze; pierwszy wyraz ≤ 0.00005.

$$\leq 1 + nu \cdot (1 + 0.0001) =$$

$$= 1 + \eta_n, \text{ gdzie } \eta_n = nu1.0001$$

Podobnie możemy szacować z dołu

$$\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j) \geq \prod_{j=1}^{n}(1-u) = (1-u)^n = 1-\binom{n}{1}u+\binom{n}{2}u^2-\ldots\pm\binom{n}{n}u^n \geq$$

$$\geq 1 - \left(\binom{n}{1}u + \binom{n}{2}u^2 + \ldots + \binom{n}{n}u^n\right) \geq 1 - 1.0001nu =$$

Ten sam argument co wyżej

$$= 1 + \eta_n, \text{ gdzie } \eta_n = -1.0001nu.$$

$\blacksquare$