Stąd widać, że f^{-1} jest ciągła.

Pozostaje jedynie dowieść, że f^{-1} jest różniczkowalna. Niech $\mu = Df(x)$. Pokażemy, że f^{-1} jest różniczkowalna w $y=f(x)$ i ma pochodną μ^{-1}. Tak jak w dowodzie twierdzenia 2.2 dla $x_1 \in V$ mamy

$$f(x_1)=f(x)+\mu(x_1-x)+\varphi(x_1-x),$$

gdzie

$$\lim_{x_1\to x}\frac{|\varphi(x_1-x)|}{|x_1-x|}=0.$$

Dlatego

$$\mu^{-1}(f(x_1)-f(x))=x_1-x+\mu^{-1}(\varphi(x_1-x)).$$

Ponieważ każdy $y_1 \in W$ jest postaci $f(x_1)$ dla pewnego $x_1 \in V$, więc można to zapisać następująco:

$$f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y)+\mu^{-1}(y_1-y)-\mu^{-1}(\varphi[f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y)]),$$

i dlatego wystarczy pokazać, że

$$\lim_{y_1\to y}\frac{|\mu^{-1}(\varphi[f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y)])|}{|y_1-y|}=0.$$

W tym celu (zadanie 1.10) wystarczy pokazać, że

$$\lim_{y_1\to y}\frac{|\varphi(f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y))|}{|y_1-y|}=0.$$

Ale

$$\frac{|\varphi(f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y))|}{|y_1-y|}=\frac{|\varphi(f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y))|}{|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y)|}\cdot\frac{|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y)|}{|y_1-y|}.$$

Ponieważ f^{-1} jest ciągła, więc $f^{-1}(y_1)\to f^{-1}(y)$, gdy $y_1\to y$. Dlatego pierwszy czynnik dąży do 0. Ponieważ, na mocy (6), drugi czynnik jest mniejszy niż 2, więc ich iloczyn także dąży do 0. ■

Zauważmy, że ze wzoru na pochodną funkcji f^{-1} wynika, że pochodna ta jest w istocie ciągła (i jeśli f jest klasy C^∞ to f^{-1} też jest klasy C^∞). Rzeczywiście, wystarczy zauważyć, że wyrazy macierzy odwrotnej do macierzy A to funkcje klasy C^∞ zmiennych, będących wyrazami macierzy A.

Wynika to ze wzorów Cramera: $(A^{-1})_{ji}=(\det A^{ij})/(\det A)$, gdzie A^{ij} jest macierzą otrzymaną z A przez usunięcie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Warto też zauważyć, że funkcja odwrotna f^{-1} może istnieć nawet jeśli $\det f'(a)=0$. Na przykład, jeżeli $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ jest określona jako $f(x)=x^3$, to $f'(0)=0$, ale f ma funkcję odwrotną $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$. Niemniej jedno jest pewne: jeśli $\det f'(a)=0$, to f^{-1} nie może być różniczkowalna w $f(a)$. Aby tego dowieść, zauważmy, że $(f\circ f^{-1})(x)=x$. Gdyby f^{-1} była różniczkowalna w $f(a)$, to zasada różniczkowania funkcji złożonej dawałaby $f'(a)\cdot(f^{-1})'(f(a))=I$, skąd mielibyśmy $\det f'(a)\cdot\det(f^{-1})'(f(a))=1$, co zaprzecza temu, że $\det f'(a)=0$.

Zadania

2.36*. Niech $A\subset\mathbf{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i $f\colon A\to\mathbf{R}^n$ funkcją 1-1 mającą ciągłą pochodną taką, że $\det f'(x)\neq 0$ dla wszystkich x. Pokazać, że $f(A)$ jest zbiorem otwartym i $f^{-1}\colon f(A)\to A$ jest różniczkowalna. Pokazać także, że $f(B)$ jest otwarty dla każdego zbioru otwartego $B\subset A$.

2.37. (a) Niech funkcja $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ ma ciągłą pochodną. Pokazać, że f nie jest 1-1.

Wskazówka. Jeżeli na przykład $D_1f(x,y)\neq 0$ dla wszystkich (x,y) z pewnego zbioru otwartego A, to rozważmy $g\colon A\to\mathbf{R}^2$ określoną jako $g(x,y)=(f(x,y),y)$.

(b) Uogólnić ten wynik na przypadek funkcji mającej ciągłą pochodną $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, gdzie $m<n$.

2.38. (a) Pokazać, że jeżeli $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ spełnia $f'(a)\neq 0$ dla wszystkich $a\in\mathbf{R}$, to f jest 1-1 (na całej $\mathbf{R}$).

(b) Określmy $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ wzorem $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$. Pokazać, że $\det f'(x,y)\neq 0$ dla wszystkich (x,y), lecz f nie jest 1-1.

2.39. Wykorzystać funkcję $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ określoną wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{gdy}\quad x\neq 0,\\ 0, & \text{gdy}\quad x=0,\end{cases}$$

by pokazać, że z założeń twierdzenia 2.11 nie można wyeliminować ciągłości pochodnej.