Dowód. Niech λ będzie odwzorowaniem liniowym $Df(a)$. Wtedy λ jest odwracalne, ponieważ $\det f'(a)\neq 0$. A więc $D(\lambda^{-1}\circ f)(a)=D(\lambda^{-1})(f(a))\circ Df(a)=\lambda^{-1}\circ Df(a)$ jest odwzorowaniem liniowym identycznościowym. Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla $\lambda^{-1}\circ f$, to jest oczywiście prawdziwe dla f. Dlatego możemy od razu założyć, że λ jest identycznością. Tak więc, jeśli tylko $f(a+h)=f(a)$, to mamy Nie załóż, że $\lambda = I$

$\|\lambda^{-1}\| = 1/\alpha$

$$\frac{|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)|}{|h|}=\frac{|h|}{|h|}=1.$$

$\forall_x\ |\lambda(x)| \geq \alpha|x|$

Ale

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)|}{|h|}=0.$$

$\frac{|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)|}{|h|} = \frac{|\lambda(h)|}{|h|} \geq \frac{\alpha|h|}{|h|} = \alpha$

Znaczy to, że nie może zachodzić $f(x)=f(a)$ dla x dowolnie bliskiego, lecz różnego od a. Dlatego istnieje taki przedział domknięty U zawierający a w swoim wnętrzu, że

(1) $f(x)\neq f(a)$, jeżeli $x\in U$ i $x\neq a$.

Skoro f ma ciągłą pochodną na zbiorze otwartym zawierającym a, to możemy także założyć, że

bo jeśli f' ciągła to $\det f'(x)$ też ciągła

(2) $\det f'(x)\neq 0$ dla $x\in U$.

(3) $|D_jf^i(x)-D_jf^i(a)|<1/2n^2$ dla wszystkich i, j oraz $x\in U$.

Zauważmy, że stosując (3) i lemat 2.10 do funkcji $g(x)=f(x)-x$ dostajemy

$$|f(x_1)-x_1-(f(x_2)-x_2)|\leqslant\tfrac{1}{2}|x_1-x_2|$$

$D_jg^i(x)=D_jf^i(x)-0$

$D_ig^i(x)=D_ig^i(x)-1$

dla $x_1, x_2\in U$. Ponieważ

$$|x_1-x_2|-|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-x_1-(f(x_2)-x_2)|\leqslant\tfrac{1}{2}|x_1-x_2|,$$

więc otrzymujemy

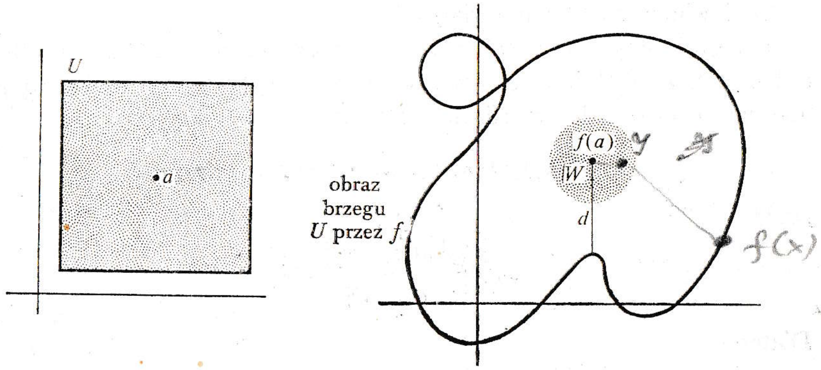
$|D_jg^i(x)-D_jg^i(a)|<1/2n^2$

(4) $|x_1-x_2|\leqslant 2|f(x_1)-f(x_2)|$ dla $x_1, x_2\in U$.

$M=\frac{1}{2n^2}$ (z lem. 2.10)

Obraz brzegu U przez f jest więc zbiorem zwartym, który na mocy (1) nie zawiera $f(a)$ (rysunek 2.3).

$g(x)=f(x)-f'(a)(x)$



Rys. 2.3

Dlatego istnieje taka liczba $d>0$, że $|f(a)-f(x)|\geqslant d$ dla x z brzegu U. Niech $W=\{y\colon |y-f(a)|<\tfrac{1}{2}d\}$. Jeżeli $y\in W$ i x należy do brzegu U, to

(5) $|y-f(a)|<|y-f(x)|$.

Pokażemy, że dla każdego $y\in W$ istnieje dokładnie jeden taki punkt x z wnętrza U, że $f(x)=y$. Aby tego dowieść, rozważmy funkcję $g\colon U\to \mathbf{R}$ określoną wzorem

$$g(x)=|y-f(x)|^2=\sum_{i=1}^{n}(y^i-f^i(x))^2.$$

Funkcja ta jest ciągła i dlatego przyjmuje minimum na U. Na mocy (5) dla x z brzegu U mamy $g(a)<g(x)$. Dlatego g nie przyjmuje minimum na brzegu U. Z twierdzenia 2.6 wynika istnienie takiego punktu x z wnętrza U, że $D_jg(x)=0$ dla wszystkich j, to znaczy

$$\sum_{i=1}^{n}2(y^i-f^i(x))\cdot D_jf^i(x)=0 \quad \text{dla wszystkich } j.$$

Na mocy (2) macierz $(D_jf^i(x))$ ma niezerowy wyznacznik. Dlatego musi zachodzić $y^i-f^i(x)=0$ dla wszystkich i, czyli $y=f(x)$. Dowodzi to istnienia x. Jego jedyność wynika natychmiast z (4).

Niech V będzie przekrojem wnętrza U z $f^{-1}(W)$. Pokazaliśmy, że funkcja $f\colon V\to W$ ma funkcję odwrotną $f^{-1}\colon W\to V$. Możemy zapisać (4) inaczej:

(6) $|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)|\leqslant 2|y_1-y_2|$ dla $y_1, y_2\in W$.