(b) Niech $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{gdy} \quad (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad (x, y) = 0. \end{cases}$$

Pokazać, że f jest różniczkowalna także w punkcie $(0, 0)$, ale $D_i f$ nie są ciągłe w $(0, 0)$.

2.33. Pokazać, że z założeń twierdzenia 2.8 można wyeliminować ciągłość $D_1 f^j$ w a.

2.34. Funkcja $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ jest *jednorodna* stopnia m, jeżeli $f(tx) = t^m f(x)$ dla wszystkich $x \in \boldsymbol{R}^n$ i $t \in \boldsymbol{R}$. Pokazać, że jeżeli f jest także różniczkowalna, to

$$\sum_{i=1}^{n} x^i D_i f(x) = m f(x).$$

Wskazówka. Znaleźć $g'(1)$ dla $g(t) = f(tx)$.

2.35. Dowieść, że jeżeli $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ jest różniczkowalna i $f(0) = 0$, to istnieją takie $g_i\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, że

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x).$$

Wskazówka. Jeżeli $h_x(t) = f(tx)$, to $f(x) = \int_0^1 h_x'(t)\,dt$.

Funkcje odwrotne

Przypuśćmy, że $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ma ciągłą pochodną na zbiorze otwartym zawierającym a i $f'(a) \neq 0$. Jeżeli $f'(a) > 0$, to istnieje taki odcinek otwarty V zawierający a, że $f'(x) > 0$ dla $x \in V$ (a dla $f'(a) < 0$ mielibyśmy $f'(x) < 0$). Zatem f rośnie (lub maleje) na V, więc jest 1-1 i dlatego ma funkcję odwrotną f^{-1} określoną na pewnym odcinku otwartym W zawierającym $f(a)$. Ponadto można łatwo pokazać, że f^{-1} jest różniczkowalna i że dla $y \in W$ zachodzi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Analogiczne rozumowanie dla wyższych wymiarów jest o wiele bardziej skomplikowane, lecz jego wynik (twierdzenie 2.11) jest bardzo ważny. Zaczniemy od prostego lematu.

2.10. Lemat. *Niech $A \subset \boldsymbol{R}^n$ będzie przedziałem i niech $f\colon A \to \boldsymbol{R}^n$ ma ciągłą pochodną. Jeżeli istnieje taka liczba M, że $|D_j f^i(x)| \leqslant M$ dla wszystkich x z wnętrza A, to*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant n^2 M |x - y|$$

dla wszystkich $x, y \in A$.

Dowód. Mamy

$$f^i(y) - f^i(x) = \sum_{j=1}^{n} [f^i(y^1, \ldots, y^j, x^{j+1}, \ldots, x^n) - f^i(y^1, \ldots, y^{j-1}, x^j, \ldots, x^n)].$$

Stosując twierdzenie o wartości średniej otrzymujemy

$$f^i(y^1, \ldots, y^j, x^{j+1}, \ldots, x^n) - f^i(y^1, \ldots, y^{j-1}, x^j, \ldots, x^n) = (y^j - x^j) \cdot D_j f^i(z_{ij})$$

dla pewnych z_{ij}. Wartość bezwzględna wyrażenia z prawej strony jest mniejsza lub równa $M \cdot |y^j - x^j|$. Tak więc

$$|f^i(y) - f^i(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |y^j - x^j| \cdot M \leqslant nM|y - x|,$$

ponieważ dla każdego j mamy $|y^j - x^j| \leqslant |y - x|$. W końcu

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f^i(y) - f^i(x)| \leqslant n^2 M \cdot |y - x|. \blacksquare$$

2.11. Twierdzenie (o funkcji odwrotnej). *Załóżmy, że $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ ma ciągłą pochodną na zbiorze otwartym zawierającym a oraz $\det f'(a) \neq 0$. Wtedy istnieją zbiór otwarty V zawierający a i zbiór otwarty W zawierający $f(a)$ takie, że $f\colon V \to W$ ma ciągłą funkcję odwrotną $f^{-1}\colon W \to V$, która jest różniczkowalna i dla wszystkich $y \in W$ spełnia*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$