ANALIZA III.2

1. Całki krzywoliniowe i wzór Greena

1.1. Całka krzywoliniowa niezorientowana. Rozważamy funkcję $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Chcemy obliczyć całkę z ciągłej funkcji $f(x, y, z)$ wzdłuż krzywej $\sigma : [a, b] \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, σ klasy C^1. Można myśleć, że obraz krzywej opisuje przewód, a wielkość $f(x, y, z)$ reprezentuje gęstość masy przewodu w punkcie (x, y, z). Chcemy, aby całka dała w wyniku całkowitą masę przewodu. Określamy całkę wzorem

$$\int_\sigma f\,ds = \int_\sigma f(x, y, z)\,ds := \int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\,dt$$
$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$$

Jeśli $\sigma(t)$ jest kawałkami klasy C^1 lub $f(\sigma(t))$ jest kawałkami ciągła, to rozbijamy przedział czasu na skończoną liczbę przedziałów, na których można zastosować powyższy wzór. Przy założeniu, że $f \equiv 1$ powinniśmy otrzymać długość krzywej:

$$l(\sigma) = \int_\sigma ds := \int_a^b \|\sigma'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt. \tag{1.1}$$

Przykład 1.2. *Rozważmy spiralę $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Niech $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Mamy $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$. Wtedy $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}$. Zatem*

$$\int_\sigma (x^2 + y^2 + z^2)\,ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{8}{3}\pi^3\right).$$

Zastanówmy się teraz dlaczego (1.1) daje długość krzywej. Podzielimy przedział czasu $[a, b]$ punktami $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. W ten sposób krzywa zostanie podzielona na n fragmentów. Zakładamy, że długość fragmentu wynosi $\|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|$. Długość krzywej wynosi w przybliżeniu

$$l(\sigma) \approx \sum_{i=1}^n \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|.$$

Dalej z twierdzenia Lagrange'a mamy

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(\alpha_i)\Delta t_i \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(\beta_i)\Delta t_i, \\ z(t_i) - z(t_{i-1}) &= x'(\gamma_i)\Delta t_i, \end{aligned}$$

gdzie $t_{i-1} \le \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \le t_i$. Całkowita długość krzywej wynosi w przybliżeniu

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\alpha_i)^2 + y'(\beta_i)^2 + z'(\gamma_i)^2}\,\Delta t_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$$

Sprawdzimy, że różnica pomiędzy powyższą sumą, a całką dąży do zera, gdy $n \to \infty$ i średnica podziału dąży do zera. Skorzystamy z nierówności trójkąta

$$|\|v\| - \|u\|| \le \|v - u\|$$

dla wektorów $v = (x'(\alpha_i), y'(\beta_i), z'(\gamma_i))$ i $v = (x'(t), y'(t), z'(t))$, gdy $t_{i-1} \le t \le t_i$. Wtedy dla danego $\varepsilon > 0$ i dostatecznie drobnego podziału

$$\begin{aligned} &\left| \sqrt{x'(\alpha_i)^2 + y'(\beta_i)^2 + z'(\gamma_i)^2} - \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \right| \Delta t_i \\ &\qquad \le \sqrt{[x'(\alpha_i) - x'(t)]^2 + [y'(\beta_i) - y'(t)]^2 + [z'(\gamma_i) - z'(t)]^2}\Delta t_i < \sqrt{3}\varepsilon\Delta t_i. \end{aligned}$$

Funkcje $x'(t)$, $y'(t)$ i $z'(t)$ są jednostajnie ciągłe. Możemy założyć, że przedział $[a, b]$ dzielimy na n równych części tak, aby oscylacja każdej z funkcji x', y' i z' była mniejsza niż $\varepsilon > 0$ na każdym podprzedziale podziału.

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\alpha_i)^2 + y'(\beta_i)^2 + z'(\gamma_i)^2}\Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt \right| \\ &\quad \le \sum_{i=1}^{n} \left| \sqrt{x'(\alpha_i)^2 + y'(\beta_i)^2 + z'(\gamma_i)^2}\Delta t_i - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt \right| \\ &\quad \le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \sqrt{x'(\alpha_i)^2 + y'(\beta_i)^2 + z'(\gamma_i)^2} - \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \right| dt \\ &\quad \le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(\alpha_i) - x'(t)]^2 + [y'(\beta_i) - y'(t)]^2 + [z'(\gamma_i) - z'(t)]^2}\,dt \\ &\qquad\qquad \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{3}\varepsilon\Delta t_i = \sqrt{3}\varepsilon(b - a) \end{aligned}$$

Dokładamy gęstość. Przyjmujemy, że gęstość masy na danym fragmencie jest stała i wynosi $f(\sigma(s_i))$, gdzie $t_{i-1} \le s_i \le t_i$. Masa fragmentu wynosi w przybliżeniu

$$m_i \approx f(\sigma(s_i))\,\|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|.$$

Dalej z twierdzenia Lagrange'a mamy

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(\alpha_i)\Delta t_i \approx x'(s_i)\Delta t_i, \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(\beta_i)\Delta t_i \approx y'(s_i)\Delta t_i, \\ z(t_i) - z(t_{i-1}) &= z'(\gamma_i)\Delta t_i \approx z'(s_i)\Delta t_i, \end{aligned}$$

gdzie $t_{i-1} \leq \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, s_i \leq t_i$. Ponadto

$$|x'(\alpha_i) - x'(s_i)| < \varepsilon/3, |y'(\alpha_i) - y'(s_i)| < \varepsilon/3, |z'(\alpha_i) - z'(s_i)| < \varepsilon/3,$$

gdy podział jest dostatecznie drobny, co wynika z jednostajnej ciągłości $x'(t), y'(t), z'(t)$. Całkowita masa krzywej wynosi w przybliżeniu

$$\sum_{i=1}^{n} f(\sigma(s_i))\sqrt{x'(s_i)^2 + y'(s_i)^2 + z'(s_i)^2}\,\Delta t_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(\sigma(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$$

Sprawdzimy jeszcze, że różnica pomiędzy

$$\sum_{i=1}^{n} f(\sigma(s_i))\,\|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{n} f(\sigma(s_i))\sqrt{x'(\alpha_i)^2 + y'(\beta_i)^2 + z'(\gamma_i)^2}\,\Delta t_i$$

i sumą całkową

$$\sum_{i=1}^{n} f(\sigma(s_i))\sqrt{x'(s_i)^2 + y'(s_i)^2 + z'(s_i)^2}\,\Delta t_i$$

dąży do zera, gdy $n \to \infty$. Różnica miedzy sumami co do wartości bezwzględnej nie przekracza

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} |f(\sigma(s_i))| \left| \sqrt{x'(\alpha_i)^2 + y'(\beta_i)^2 + z'(\gamma_i)^2} - \sqrt{x'(s_i)^2 + y'(s_i)^2 + z'(s_i)^2} \right| \Delta t_i \\ &\quad \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\sigma(s_i))| \sqrt{[x'(\alpha_i) - x'(s_i)]^2 + [y'(\beta_i) - y'(s_i)]^2 + [z'(\gamma_i) - z'(s_i)]^2}\Delta t_i. \end{aligned}$$

Funkcja f jest ograniczona na krzywej, np. $|f(\sigma(t))| \leq M$. Funkcje $x'(t)$, $y'(t)$ i $z'(t)$ są jednostajnie ciągłe. Jak poprzednio, przedział $[a, b]$ dzielimy na n równych części tak, aby oscylacja każdej z funkcji x', y' i z' była mniejsza niż $\varepsilon > 0$ na każdym podprzedziale podziału. Wtedy ostatnie wyrażenie jest mniejsze niż

$$\sum_{i=1}^{n} M\sqrt{3\varepsilon^2}\,\Delta t_i = M(b-a)\sqrt{3}\varepsilon.$$

Jeśli rozważamy funkcję $f(x, y)$ dwu zmiennych i krzywą $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, to $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ oraz

$$\int_\sigma f(x, y)\,ds = \int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\,dt = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Jeśli $f(x,y) \geq 0$, to całkę można interpretować np. jako pole powierzchni płotu, którego podstawą jest krzywa σ a wysokość w punkcie (x,y) wynosi $f(x,y)$.

Przykład 1.3. *Ciocia Tomka Sawyera kazała wybiałkować płot z obu stron. Za każdy metr kwadratowy Tomek otrzymuje 2 \$. Płot opisany jest przez*

$$\sigma(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t), \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad f(x,y) = 1 + \frac{y}{3}.$$

Mamy

$$\sigma'(t) = 30(-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t), \quad \|\sigma'(t)\| = 90\sin t|\cos t|.$$

Powierzchnia płotu wynosi

$$90\int_0^\pi (1 + 10\sin^3 t)\sin t|\cos t|\,dt = 180\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 10\sin^3 t)\sin t\cos t\,dt$$

$$180\left[\frac{1}{2}\sin^2 t + 2\sin^5 t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 180\cdot\frac{5}{2} = 450.$$

Zarobek Tomka wyniesie zatem $450\cdot 2\cdot 2 = 1800$ *\$.*

1.2. **Całka krzywoliniowa zorientowana.** Niech $F(x,y,z)$ będzie polem sił w $\mathbb{R}^3$ (np. sił grawitacyjnych lub elektrycznych). Tzn. $F = (F_1, F_2, F_3)$. Załóżmy, że obiekt porusza się pod działaniem pola sił F wzdłuż krzywej $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Przyjmijmy, że σ jest linią prostą i obiekt został przesunięty o wektor d. Załóżmy też, że pole sił jest stałe, tzn. $F(x,y,z)$ nie zależy od (x,y,z). Wykonana praca wynosi wtedy $\|F_d\|\|d\|$, gdzie F_d oznacza składową siły F równoległą do przesunięcia d. Wtedy $F_d = (F\circ d)\frac{d}{\|d\|^2}$. Niech α oznacza kąt pomiędzy F i d. Wtedy $\|F_d\| = \|F\|\cos\alpha$ i praca wynosi

$$\|F_d\|\,\|d\| = \|F\|\,\|d\|\cos\alpha = F\circ d.$$

Ogólnie, gdy σ nie jest linią prostą oraz $F(x,y,z)$ nie jest stałym polem sił, to dzielimy przedział $[a,b]$ na n równych części. Przyjmujemy, że fragment od $\sigma(t_{i-1})$ do $\sigma(t_i)$ jest odcinkiem i, że siła F jest stała na tym odcinku i wynosi $F(\sigma(s_i))$, gdzie $t_{i-1} \leq s_i \leq t_i$. Wykonana praca wynosi wtedy

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(\sigma(s_i))\circ[\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})].$$

Dalej

$$\begin{aligned}\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1}) &= (x(t_i) - x(t_{i-1}), y(t_i) - y(t_{i-1}), z(t_i) - z(t_{i-1}))\\ &= (x'(\alpha_i), y'(\beta_i), z'(\gamma_i))\,\Delta t_i \approx (x'(s_i), y'(s_i), z'(s_i))\,\Delta t_i = \sigma'(s_i)\Delta t_i,\end{aligned}$$

gdzie $t_{i-1} \leq \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, s_i \leq t_i$. Przybliżenie, jak poprzednio, wynika z tego, że $x'(t), y'(t), z'(t)$ są jednostajnie ciągłe. Mamy

$$\|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1}) - \sigma'(s_i)\Delta t_i\| < \varepsilon\Delta t_i.$$

Zatem

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F(\sigma(s_i)) \circ \sigma'(s_i)\Delta t_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b F(\sigma(t)) \circ \sigma'(t)\,dt.$$

Przyjmujemy więc

$$W = \int_a^b F(\sigma(t)) \circ \sigma'(t)\,dt.$$

Tę wielkość nazywamy całką krzywoliniową zorientowaną. Stosuje się też inne oznaczenie na tę całkę

$$W = \int_\sigma F \circ ds.$$

Praca jest równa całce z iloczynu skalarnego siły i wektora stycznego do krzywej, czyli wektora prędkości. Załóżmy, że $\sigma'(t) \neq 0$ dla $a \le t \le b$. Wtedy

$$T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$$

jest jednostkowym wektorem stycznym. Zatem

$$\begin{aligned} (1.4) \qquad \int_\sigma F \circ\, ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \circ \sigma'(t)\,dt \\ = \int_a^b F(\sigma(t)) \circ T(t)\,\|\sigma'(t)\|\,dt = \int_\sigma (F \circ T)\,ds. \end{aligned}$$

Całka zorientowana jest zatem równa całce niezorientowanej z iloczynu skalarnego siły F z jednostkowym wektorem stycznym do σ.

Przykład 1.5. *$\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$ $0 \le t \le \pi$, oraz $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Wtedy $\sigma'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$ oraz*

$$\int_\sigma F \circ ds = \int_0^\pi (\sin t, \cos t, t) \circ (\cos t, -\sin t, 1)\,dt = \int_0^\pi t\,dt = \frac{\pi^2}{2}.$$

Używamy też innych oznaczeń na całkę zorientowaną. Jeśli $F = (F_1, F_2, F_3)$ oraz $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, to

$$\begin{aligned} &\int_a^b F(\sigma(t)) \circ \sigma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b [F_1(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + F_2(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + F_3(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)]\,dt \\ &= \int_\sigma F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz, \end{aligned}$$

gdzie $\int_\sigma F_1\,dx = \int_a^b F_1(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)\,dt$ i analogicznie mamy równość pozostałych wyrazów. W niektórych przypadkach całkę zorientowaną można obliczyć bez odwoływania się do definicji. Dotyczy to tzw. pól gradientowych.

Twierdzenie 1.6. *Jeśli $F(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$ dla funkcji $f(x,y,z)$ klasy C^1, to*

$$\int_\sigma F \circ ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)),$$

gdzie $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$.

Dowód.

$$\int_\sigma F \circ ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \circ \sigma'(t)\,dt = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \circ \sigma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\sigma(t))\,dt = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

□

Przykład 1.7. *Chcemy policzyć $\int_\sigma y\,dx + x\,dy$, gdzie $\sigma(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \sin^3\frac{\pi t}{2}\right)$, dla $0 \le t \le 1$. Mamy $F = (y,x)$. Wtedy $\nabla f = F$ dla $f(x,y) = xy$. Zatem*

$$\int_\sigma y\,dx + x\,dy = xy\Big|_{(0,0)}^{(\frac{1}{4},1)} = \frac{1}{4}.$$

Co by było gdybyśmy próbowli liczyć z definicji?

$$\int_\sigma y\,dx + x\,dy, = \int_0^1 (y(t),x(t)) \circ \sigma'(t)\,dt$$

$$\int_0^1 \left(\sigma_2(t)\sigma_1'(t) + \sigma_1(t)\sigma_2'(t)\right)\,dt,$$

co robi się dość skomplikowane.

Uwaga 1.8. *Nie każde pole wektorowe jest gradientem jakiejś funkcji. Załóżmy, że*

$$F = (F_1,F_2,F_3) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

gdzie f jest klasy C^2. Wtedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}.$$

Czyli

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Jest to warunek konieczny na to by pole było gradientowe.

Przykłady.

(a) $F(x,y,z) = (x^2+yz, x+y, z)$. Mamy $\frac{\partial F_1}{\partial y} = z$, $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$.
(b) $F(x,y,z) = (yz, zx, xy)$. Wtedy $F = \nabla(xyz)$.
(c) $F = -\frac{GMm}{r^3}(x,y,z)$. Dla $V(x,y,z) = \frac{GMm}{r}$ mamy $F = \nabla V$. Istotnie

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}x$$
$$\nabla V = -GMm(x,y,z)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = -GMm(x,y,z)r^{-3} = F.$$

(d) $F = (0,0,-mg)$. Dla $V = -mgz$ mamy $F = \nabla V$.

Zakładaliśmy, że $\sigma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ jest różnowartościowe, ale w dotychczasowych rozważaniach nie miało to znaczenia - wszystkie wielkości można było zdefiniować tak samo. Teraz zaczniemy identyfikować krzywe, które mają ten sam obraz i różnowartościowość σ zaczyna być ważna.

Definicja 1.9. *Krzywa $\sigma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ jest kawałkami C^1 jeśli istnieją punkty $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ takie, że $\sigma : (t_{i-1}, t_i) \mapsto \mathbb{R}^3$ jest klasy C^1.*

Definicja 1.10. *C nazywamy krzywą Jordana (simple curve) jeśli C jest obrazem odwzorowania $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ takiego, że σ jest kawałkami klasy C^1 oraz σ jest różnowartościowe. Tzn. C nie ma samoprzecięć. Punkty $\sigma(a)$ i $\sigma(b)$ nazywamy końcami krzywej C. Każda krzywa Jordana ma dwie orientacje. Krzywą Jordana z wybraną orientacją nazywamy zorientowaną krzywą Jordana.*

Definicja 1.11. *Zamkniętą krzywą Jordana nazywamy obraz przez odwzorowanie $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, kawałkami klasy C^1, gdzie σ jest różnowartościowe na $[a,b)$ oraz $\sigma(a) = \sigma(b)$.*

Zanim wyjaśnimy starannie, co to jest orientacja rozważmy przkłady.

Przykład 1.12. *$C = \{x^2+y^2 = 1,\ z = 0\}$ jest okręgiem obieganym przeciwnie do wskazówek zegara (analogowego). Chcemy obliczyć $\int_C (y,0,0) \circ ds = \int_C y\,dx$.*

Parametryzujemy C (zgodnie z orientacją)

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Wtedy

$$\int_C y\,dx = \int_0^{2\pi} \sin t(-\sin t)\,dt = -\pi.$$

W tym momencie C jest obrazem krzywej, a σ jej parametryzacją. Trzeba uważać, aby parametryzacja σ była różnowartościowa i zgodna z orientacją krzywej C. Np. parametryzacja

$$\eta(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0) \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

nie jest różnowartościowa. Okrąg C jest obiegany dwukrotnie. Wtedy

$$\int_C y\,dx = \int_0^{2\pi} \sin 2t(-2\sin 2t)\,dt$$
$$= -\,2\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = -\int_0^{4\pi} \sin^2 u\,du = -2\pi.$$

Nie bardzo jest więc sens pisać $\int_C y\,dx$ jeśli nie ograniczymy klasy parametryzacji. Z kolei

$$\eta(t) = (\sin t, \cos t, 0) \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

jest parametryzacją niezgodną z orientacją okręgu C. Wtedy

$$\int_C y\,dx = \int_0^{2\pi} \cos t \cos t\,dt = \pi.$$

Jeśli więc chcemy używać symbolu $\int_C$ to musimy być bardziej precyzyjni.

Przykład 1.13. *Załóżmy, że $\sigma : [-a, a] \mapsto \mathbb{R}^3$. Niech $\gamma(t) = \sigma(-t)$. Wtedy $\gamma(-a) = \sigma(a)$ i $\gamma(a) = \sigma(-a)$, a obrazy obu odwzorowań są takie same. Krzywa przebiegana jest w przeciwnym kierunku. Czyli γ i σ mają przeciwne orientacje.*

Definicja 1.14. *Niech $\sigma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ i $\gamma : [c, d] \mapsto \mathbb{R}^3$ będą krzywymi (różnowartościowe, C^1) takimi, że $\sigma([a, b]) = \gamma([c, d]) = C$. Jeśli $\sigma(a) = \gamma(c)$ i $\sigma(b) = \gamma(d)$ to mówimy, że σ i γ mają tę samą orientację. Jeśli $\sigma(a) = \gamma(d)$ i $\sigma(b) = \gamma(c)$ to mówimy, że σ i γ mają przeciwną orientację.*

Przykład 1.15. *Niech $\sigma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ będzie krzywą, a $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ i $\gamma(t) = \sigma(a + b - t)$. Wtedy σ i γ mają przeciwne orientacje.*

Okazuje się, ze definicja 1.14 nie jest jeszcze dość precyzyjna. Naturalne jest pytanie czy jeśli σ i γ mają tę samą orientację to całki po nich są te same. Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.16. *Niech $\sigma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ i $\gamma : [c, d] \mapsto \mathbb{R}^3$ będą krzywymi klasy C^1 takimi, że $\sigma(a, b) = \gamma(c, d) = C$ oraz σ na (a, b) i γ na (c, d) są różnowartościowe. Niech $\sigma'(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$. Wtedy*

$$\rho = \sigma^{-1} \circ \gamma : (c, d) \mapsto (a, b)$$

jest klasy C^1.

Uwaga 1.17. *Twierdzenie nie jest trywialne, bo nie wiemy, co miałoby znaczyć, że σ^{-1} jest C^1. Nie dowodzimy tego, lecz dowodzimy, że całe złożenie razem jest C^1. Do dowodu używa się twierdzenia o funkcji odwrotnej dla odpowiednio zdefiniowanego odwzorowania z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$. Proszę zauważyć, że ograniczenie się do odcinków otwartych sprawia, że Twierdzenie 1.16 ma sens też dla krzywych zamkniętych. Nie rozróżniamy czy krzywa jest zamknięta czy nie.*

Dowód. Niech $t_0 \in (a,b), \sigma'(t_0) \neq 0$. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $\sigma'(t) \neq 0$ dla $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Rozważmy odwzorowanie

$$h : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$$

dane wzorem

$$h(t, x_2, x_3) = \sigma(t) + (0, x_2, x_3).$$

Wtedy

$$Dh(t, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \sigma_1'(t) & 0 & 0 \\ \sigma_2'(t) & 1 & 0 \\ \sigma_3'(t) & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det Dh(t_0, 0, 0) \neq 0.$$

Skorzystamy teraz z twierdzenia o funkcji odwrotnej. Istnieją $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ i zbiory otwarte $(0,0) \in V \subset \mathbb{R}^2$, $h(t_0, 0, 0) = \sigma(t_0) \in U \subset \mathbb{R}^3$ takie, że

$$h : (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1) \times V \mapsto U$$

jest wzajemnie jednoznaczne i odwrotne h^{-1} jest klasy C^1 na U. Zauważmy, że dla $t \in (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1)$

$$\begin{aligned} h(t,0,0) =& \sigma(t) \\ h^{-1}(\sigma(t)) =& h^{-1}(h(t,0,0)) = (t,0,0) \end{aligned}$$

Niech $\pi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1$ będzie rzutem na pierwszą współrzędną. Wtedy

$$\pi \circ h^{-1}(\sigma(t)) = t$$

czyli $\pi \circ h^{-1}$ ograniczone do $\sigma(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1)$ zadaje nam odwrotne do σ. Ponadto $\pi \circ h^{-1}$ jest C^1 na U, bo jest złożeniem dwóch funkcji klasy C^1.

Niech $s_0 \in (c,d)$ będzie takie, że $\gamma(s_0) = \sigma(t_0)$. Wtedy jeśli $s \in (s_0 - \varepsilon_2, s_0 + \varepsilon_2)$ (dla dostatecznie małego ε_2), to $\gamma(s) \in \sigma((t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1))$ czyli z jednej strony

$$\sigma^{-1}(\gamma(s)) = \pi \circ h^{-1}(\gamma(s)),$$

a z drugiej $\pi \circ h^{-1} \circ \gamma$ jest C^1. Stąd $\sigma^{-1} \circ \gamma$ jest C^1 na $(s_0 - \varepsilon_2, s_0 + \varepsilon_2)$. Ale $\sigma^{-1} \circ \gamma$ jest dobrze określone na (c,d) i C^1 na otoczeniu każdego punktu $s_0 \in (c,d)$ więc jest klasy C^1.

Zwróćmy uwagę, że konstrukcja h służy nam tylko do pokazania klasy C^1, $\sigma^{-1} \circ \gamma$ jest określone niezależnie od tego. h^{-1} jakby "wyprostowuje" nam krzywą $\sigma(t)$ w otoczeniu punktu $\sigma(t_0)$. Zadaje nam nowe współrzędne, w których fragment krzywej jest zbiorem $(t,0,0)$, $t \in (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1)$. Żeby pokazać, że odwzorowanie określone na krzywej jest regularne, musimy zbudować takowe na otoczeniu krzywej. □

Wniosek 1.18. *Przy założeniach jak w Twierdzeniu 1.16*

$$\gamma = \sigma \circ \rho,$$

gdzie ρ jest C^1 ściśle monotoniczne i $\rho'(s) \geq 0$ dla każdego s lub $\rho'(s) \leq 0$ dla każdego s.

Dowód. Istotnie skoro ρ jest różnowartościowe, to nie może zajść jednocześnie $\rho'(s_1) > 0$ i $\rho'(s_2) < 0$ w pewnych punktach $s_1 \neq s_2$. $\square$

Definicja 1.19. *Przy założeniach Twierdzenia 1.16 jeśli $\rho'(s) \geq 0$ to mówimy, że σ i γ mają tę samą orientację. Jeśli $\rho'(s) \leq 0$ to mówimy, że σ i γ mają przeciwną orientację.*

Uwaga 1.20. *Rola σ i γ w Twierdzeniu 1.16, Wniosku 1.18 i Definicji 1.19 jest symetryczna. Dotyczą więc one sytuacji, gdy choć jedna z parametryzacji ma wektor styczny nie znikający w żadnym punkcie lub, ogólniej, znikający czy niezdefiniowany w skończonej ilości punktów. Wtedy możemy krzywą rozbić na kawałki.*

Twierdzenie 1.21. *Niech $\sigma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ i $\gamma : [c,d] \mapsto \mathbb{R}^3$ będą krzywymi takimi jak w Twierdzeniu 1.16. Jeśli $\sigma(a) = \gamma(c)$ i $\sigma(b) = \gamma(d)$ to*

$$\int_\sigma f\,ds = \int_\gamma f\,ds, \qquad \int_\sigma F \circ ds = \int_\gamma F \circ ds.$$

Jeśli $\sigma(a) = \gamma(d)$ i $\sigma(b) = \gamma(c)$ to

$$\int_\sigma f\,ds = \int_\gamma f\,ds, \qquad \int_\sigma F \circ ds = -\int_\gamma F \circ ds.$$

Dla zorientowanej krzywej Jordana C symbolem C^- oznaczymy tę samą krzywą, ale z przeciwną orientacją. Wtedy

$$\int_{C^-} F \circ ds = -\int_C F \circ ds,$$

o ile mamy odpowiednie założenie o nieznikaniu wektorów stycznych choć dla jednej parametryzacji.

Jeśli C jest złożona z fragmentów $C_1, C_2, \ldots, C_n$, to parametryzujemy każdy fragment osobno. Obliczamy

$$\int_C F \circ ds = \int_{C_1} F \circ ds + \ldots + \int_{C_n} F \circ ds.$$

Tak możemy zrobić np. gdy C nie jest C^1, a $C_1, ..., C_n$ takie są.

Przykład 1.22. *C jest brzegiem kwadratu jednostkowego w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych zorientowanego przeciwnie do wskazówek zegara (dodatnio). Tzn. należy myśleć, że każdy jego bok jest zorientowany przeciwnie do wskazówek zegara. Kolejne boki kwadratu parametryzujemy przedziałem $[0,1]$ następująco*

$$t \mapsto (t,0), \quad t \mapsto (1,t), \quad t \mapsto (1-t,1), \quad t \mapsto (0,1-t).$$

Wtedy

$$\int_C x^2\,dx + xy\,dy = \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 (1-t)^2(-1)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Zauważmy, że przy tej parametryzacji $\int dx$ po pionowych odcinkach jest zero czyli

$$\int_C x^2\,dx = \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 (1-t)^2(-1)\,dt.$$

Natomiast $\int dy$ jest zero po poziomych odcinkach czyli

$$\int_C xy\,dy = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 0\cdot(1-t)(-1)\,dt.$$

1.3. **Wzór Greena.** Twierdzenie podaje związek pomiędzy całką krzywoliniową zorientowaną, wzdłuż krzywej zamkniętej C w $\mathbb{R}^2$ a całką podwójną po obszarze D ograniczonym przez tę krzywą.

Definicja 1.23. *Obszar D nazywamy elementarnym typu I jeśli*

$$D = \{(x,y)\,:\,a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\},$$

gdzie φ_1 i φ_2 są funkcjami ciągłymi. D nazywamy elementarnym typu II jeśli

$$D = \{(x,y)\,:\,c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}.$$

D nazywamy obszarem elementarnym, jeśli jest jednocześnie elementarny typu I i typu II.

Brzeg każdego obszaru orientujemy przeciwnie do wskazówek zegara (analogowego). Dla obszaru I rodzaju przy dodatkowym założeniu, że φ_1,φ_2 są klasy C^1, znaczy to, że składa się on z krzywych C_1, C_2, C_3, C_4 o parametryzacji:

- C_1 $\quad\sigma_1(t) = (t,\varphi_1(t)),\qquad t\in[a,b],$
- C_2 $\quad\sigma_2(t) = (b,t),\qquad t\in[\varphi_1(b),\varphi_2(b)]$
- C_3 $\quad\sigma_3(t) = (a+b-t,\varphi_2(a+b-t)),\qquad t\in[a,b]$
- C_4 $\quad\sigma_4(t) = (a,\varphi_1(a)+\varphi_2(a)-t),\qquad t\in[\varphi_1(a),\varphi_2(a)]$

Dla obszaru II rodzaju przy dodatkowym założeniu, że ψ_1,ψ_2 są klasy C^1, znaczy to, że składa się on z krzywych C_1, C_2, C_3, C_4 o parametryzacji:

- C_1 $\quad\sigma_1(t) = (\psi_2(t),t),\qquad t\in[c,d],$
- C_2 $\quad\sigma_2(t) = (\psi_1(d)+\psi_2(d)-t,d),\qquad t\in[\psi_1(d),\psi_2(d)]$
- C_3 $\quad\sigma_3(t) = (\psi_1(c+d-t),c+d-t),\qquad t\in[c,d]$
- C_4 $\quad\sigma_4(t) = (t,c),\qquad t\in[\psi_1(c),\psi_2(c)]$

Lemat 1.24. *Niech $P(x,y)$ będzie funkcją klasy C^1 na obszarze D typu I. Załóżmy, że φ_1,φ_2 sa klasy C^1. Wtedy*

$$\int_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy,$$

gdzie C jest brzegiem obszaru D.

Uwaga 1.25. *$\int_C P\,dx$ należy rozumieć jako*

$$\int_C F \circ ds = \int_C P\,dx,$$

gdzie pole wektorowe F w $\mathbb{R}^3$ ma postać $F = (P, 0, 0)$.

Dowód. Brzeg obszaru D składa się dwu odcinków pionowych odpowiadających $x = a$ i $x = b$ oraz z dwu fragmentów wykresu C_1 i C_3 dla funkcji φ_1 i φ_2. Na odcinkach pionowych mamy $dx = 0$. Zatem

$$\int_C P\,dx = \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx.$$

Ponadto

$$\int_{C_1} P\,dx = \int_a^b P(t, \varphi_1(t))\sigma_{1,1}'(t)\,dt = \int_a^b P(t, \varphi_1(t))\,dt$$

gdzie $\sigma_1(t) = (\sigma_{1,1}(t), \sigma_{1,2}(t))$ oraz

$$\begin{aligned}\int_{C_3} P\,dx &= \int_a^b P(a+b-t, \varphi_2(a+b-t))\sigma_{3,1}'(t)\,dt = -\int_a^b P(a+b-t, \varphi_2(a+b-t))\,dt \\ &= \int_b^a P(u, \varphi_2(u))\,du = -\int_a^b P(u, \varphi_2(u))\,du.\end{aligned}$$

gdzie $\sigma_1(t) = (\sigma_{3,1}(t), \sigma_{3,2}(t))$ i $u = a + b - t$. Więc

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx = \int_a^b P(x,y)\Big|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)}\,dx \\ &= \int_a^b P(x, \varphi_2(x))\,dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\,dx \quad \text{całki Riemanna} \\ &= -\int_{C_3} P(x,y)\,dx - \int_{C_1} P(x,y)\,dx = -\int_C P\,dx. \quad \text{całki zorientowane}\end{aligned}$$

□

Zamieniając rolami P i Q oraz x i y otrzymamy

Lemat 1.26. *Niech $Q(x, y)$ będzie funkcją klasy C^1 na obszarze D typu II. Załóżmy, że ψ_1, ψ_2 są klasy C^1. Wtedy*

$$\int_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy,$$

gdzie C jest brzegiem obszaru D.

Dowód. Brzeg obszaru D składa się dwu odcinków poziomych odpowiadających $y = c$ i $y = d$ oraz z dwu fragmentów wykresu C_1 i C_3 dla funkcji ψ_1 i ψ_2. Na odcinkach poziomych mamy $dy = 0$. Zatem

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy &= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d Q(x,y)\Big|_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} dy \\ &= \int_c^d Q(\psi_2(y),y)\,dy - \int_c^d Q(\psi_1(y),y)\,dy \quad \text{całki Riemanna} \\ &= \int_{C_1} Q(x,y)\,dy + \int_{C_3} Q(x,y)\,dy = \int_C Q\,dy. \quad \text{całki zorientowane}\end{aligned}$$

bo, jak poprzednio,

$$\int_{C_1} Q\,dy = \int_c^d Q(\psi_2(t),t)\sigma'_{1,2}(t)\,dt = \int_c^d Q(\psi_2(t),t)\,dt$$

oraz

$$\begin{aligned}\int_{C_3} Q\,dy &= \int_c^d Q(\psi_1(c+d-t),c+d-t)\sigma'_{3,2}(t)\,dt = -\int_c^d Q(\psi_1(c+d-t),c+d-t)\,dt \\ &= \int_d^c Q(\psi_1(u),u)\,du = -\int_c^d Q(\psi_1(u),u)\,du,\end{aligned}$$

gdzie $u = c + d - t$. □

Definicja 1.27. *Jesli D jest obszarem elementarnym, a C jego brzegiem, to parametryzacja C nazywa się dodatnią jesli ma tę samą orientację, co obie parametryzacje z lematów 1.24 i 1.26.*

Lematy dają w wyniku

Twierdzenie 1.28 (wzór Greena). *Niech D będzie obszarem elementarnym z brzegiem C zorientowanym dodatnio. Niech $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ będą funkcjami klasy C^1 określonymi na D. Wtedy*

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Uwaga 1.29. *Parametryzacja krzywej C musi mieć tę samą orientację, co obie parametryzacje z poprzednich lematów. To rozumiemy przez "brzeg zorientowany dodatnio". Zwróćmy uwagę, że każda z tych parametryzacji ma własność $\sigma'(t) \neq 0$ poza czterema punktami, w których σ' nie jest określona. W świetle naszych poprzednich roważań, orientacja brzegu jest dobrze określona.*

Niech $\sigma(t)$ będzie parametryzacją brzegu obszaru, $\sigma'(t) = (\sigma_1'(t), \sigma_2'(t))$. Wektor $n_\sigma(t) = (\sigma_2'(t), -\sigma_1'(t))$ jest prostopadły do $\sigma'(t)$. Nazywamy go wektorem normalnym. $n_\sigma(t)$ powstał z obrotu $\sigma'(t)$ o $-\pi/2$ czyli przemnożenia $\sigma'(t)$ traktowanego jako liczba zepolona przez $-i$. Celowo wybieram $(\sigma_2'(t), -\sigma_1'(t))$, a nie wektor do niego przeciwny. W przypadku lematów 1.24 i 1.26 jest on skierowany na zewnątrz tzn. $\sigma(t)+n_\sigma(t)\neq D$. Parametryzacja σ brzegu obszaru elementarnego jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(t)+\varepsilon n_\sigma(t)\notin D$ dla $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ i pewnego ε_0 co rysunkowo oznacza, że obiegamy brzeg przeciwnie do wskazówek zegara lub inaczej obszar jest z lewej strony. Jeśli $D=\{x : F(x)<0\}$, $\partial D=\{x : F(x)=0\}$, $D^c=\{x : F(x)>0\}$ to parametryzacja brzegu jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy $F(\sigma(t)+\varepsilon n_\sigma(t))>0$ dla $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$.

Uwaga 1.30. *Wzór Greena jest prawdziwy dla obszarów, które można podzielić na kilka obszarów elementarnych. Przypuśćmy, że $D=D_1\cup D_2$ oraz wnętrza obszarów D_1 i D_2 są rozłączne. Niech C_0 oznacza część wspólną brzegów obszarów ∂D_1 i ∂D_2. Wtedy*

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$
$$=\int_{\partial D_1}P\,dx+Q\,dy+\int_{\partial D_2}P\,dx+Q\,dy=\int_{\partial D}P\,dx+Q\,dy,$$

bo całki wzdłuż C_0 zniosą się.

Uwaga 1.31. *Przypuśćmy, że funkcja P zeruje się na brzegu obszaru D, ale $\frac{\partial P}{\partial y}$ nie jest zerowa w D. Otrzymamy*

$$\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=-\int_{\partial D}P(x,y)\,dx=0.$$

Np. niech $D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le 1\}$ i $P(x,y)=1-x^2-y^2$.

Twierdzenie 1.32. *Niech D będzie obszarem, dla którego można zastosować wzór Greena. Wtedy*

$$A(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\,dy-y\,dx)=\int_{\partial D}x\,dy=-\int_{\partial D}y\,dx.$$

Dowód. Przyjmijmy $P(x,y)=-y$ oraz $Q(x,y)=x$. Mamy

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2.$$

Zatem

$$\int_{\partial D}(x\,dy-y\,dx)=\iint_D 2\,dx\,dy=2\,A(D).$$

□

Przykład 1.33. *Hipocykloida jest określona równaniem*

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\qquad a>0.$$

Chcemy obliczyć pole obszaru ograniczonego przez tę krzywą. Zastosujemy parametryzację

$$x^{1/3} = a^{1/3}\cos\theta, \quad y^{1/3} = a^{1/3}\sin\theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Wtedy

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta.$$

Dalej

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\,dy - y\,dx) = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}[3\cos^3\theta\sin^2\theta\cos\theta + 3\sin^3\theta\cos^2\theta\sin\theta]\,d\theta$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}[\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta]\,d\theta = \frac{3\pi}{8}a^2.$$

Łatwiej tu zastosować $A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\,dy - y\,dx)$ *niż* $\int_{\partial D} x\,dy$.

2. Tensory i formy

Jeśli V jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ (myślimy, że $V = \mathbb{R}^d$), to k- krotny iloczyn kartezjański $V \times V \times ... \times V$ oznaczamy V^k. Funkcja $T : V^k \mapsto \mathbb{R}$ nazywa się k-liniowa (inaczej jest k-tensorem) jeśli dla każdego $1 \le i \le k$ mamy

$$\begin{aligned} T(v_1, ..., v_i + v_i', ...v_k) =& T(v_1, ..., v_i, ...v_k) + T(v_1, ..., v_i', ...v_k) \\ T(v_1, ..., av_i, ...v_k) =& aT(v_1, ..., v_i, ...v_k), \quad a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zbiór wszystkich k -tensorów oznaczamy $\mathcal{T}^k(V)$. $\mathcal{T}^k(V)$ staje się przestrzenią liniową, jeśli dla $S, T \in \mathcal{T}^k(V)$, $a \in \mathbb{R}$ określimy

$$\begin{aligned} (S+T)(v_1, ..., v_k) :=& S(v_1, ..., v_k) + T(v_1, ..., v_k) \\ (aS)(v_1, ..., v_k) :=& a \cdot S(v_1, ..., v_k). \end{aligned}$$

Okazuje się, że tensory można mnożyć tylko, że wtedy zmieniamy przestrzenie. Dokładniej, niech $S \in \mathcal{T}^k(V)$, $T \in \mathcal{T}^j(V)$. Wtedy iloczyn tensorowy $S \otimes T \in \mathcal{T}^{j+k}(V)$ definiujmy wzorem

$$(S \otimes T)(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+j}) := S(v_1, ..., v_k) \cdot T(v_{k+1}, ..., v_{k+j}).$$

Zwróćmy uwagę na to, że mnożenie tensorów jest nieprzemienne. Zachodzą następujące własności:

$$\begin{aligned} (S_1 + S_2) \otimes T &= S_1 \otimes T + S_2 \otimes T \\ S \otimes (T_1 + T_2) &= S \otimes T_1 + S \otimes T_2 \\ (aS) \otimes T &= S \otimes (aT) = a(S \otimes T) \\ (S \otimes T) \otimes U &= S \otimes (T \otimes U) \end{aligned}$$

Możemy więc pisać $S \otimes T \otimes U$.

Zauważmy też, że nie każdy tensor z $\mathcal{T}^m(V)$ jest postaci $S \otimes T$ dla pewnych j, k takich, że $j + k = m$.

Niech V^* będzie przestrzenią dualną do V tzn. $V^* = \{\varphi : V \mapsto \mathbb{R} : \quad \varphi \text{ jest liniowe nad } \mathbb{R}\}$. Czasem mówi się, że V^* jest przestrzenią funkcjonałów na przestrzeni V. Jeśli $e_1, ..., e_d$ jest bazą V, to $\varphi_1, ..., \varphi_d$ jest bazą dualną jeśli

$$\varphi_i(e_j) = \delta_{ij},$$

gdzie, jak zwykle, $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Baza dualna jest oczywiście jednoznacznie określona, gdy dana jest baza $e_1, ..., e_d$. Zauważmy, że $\mathcal{T}^1(V) = V^*$ oraz dla ciągów $i_1, i_2, ..., i_k,\ j_1, j_2, ..., j_k$

$$\varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{i_k}(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1} \cdot ... \cdot \delta_{i_k j_k}.$$

Twierdzenie 2.1. *Niech $e_1, ..., e_d$ będzie bazą V, a $\varphi_1, ..., \varphi_d$ jej bazą dualną. Wtedy zbiór wszystkich k krotnych iloczynów tensorowych*

$$\varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{i_k}, \quad 1 \leq i_1, ..., i_k \leq d,$$

jest bazą $\mathcal{T}^k(V)$.

Uwaga 2.2. *Jest to Twierdzenie 4.1 w Spivak "Analiza na rozmaitościach" i tam też jest dowód.*

Potrzebna będzie nam także następująca konstrukcja. Jeśli $f : V \mapsto W$ jest odwzorowaniem liniowym, to odwzorowanie liniowe $f^* : \mathcal{T}^k(W) \mapsto \mathcal{T}^k(V)$ definiuje się jako

$$(f^*T)(v_1, ..., v_k) = T(f(v_1), ..., (v_k)).$$

Sprawdzamy, że (f^*T) jest k-tensorem, f^* jest liniowe na $\mathcal{T}^k(V)$ i

$$f^*(S \otimes T) = f^*S \otimes f^*T.$$

Tensor ω nazywamy alternującym jeśli dla każdych i, j

$$\omega(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -\omega(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k).$$

Wtedy dla każdej permutacji σ

$$\omega(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma)\ \omega(v_1, ..., v_k).$$

Przestrzeń liniową tensorów alternujących będziemy oznaczali $\Omega^k(V)$. Zauważmy, że jeśli ω jest alternujący, to na przykład $\omega(v, v, v_3, ..., v_k) = 0$.

Definiujemy odwzorowanie z $\mathcal{T}^k(V)$ w $\Omega^k(V)$ wzorem

$$\text{Alt}(T)(v_1, ..., v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}\sigma \cdot T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}),$$

gdzie S_k jest grupą permutacji zbioru k elementowego.

Twierdzenie 2.3. *Alt jest liniowe. Jeśli $T \in \mathcal{T}^k(V)$, to $Alt(T) \in \Omega^k(V)$. Jeśli $\omega \in \Omega^k(V)$, to $Alt(\omega) = \omega$. Jeśli $T \in \mathcal{T}^k(V)$, to $Alt(Alt(T)) = Alt(T)$.*

Dowód. Niech τ będzie transpozycją zamieniającą i z j. Dla $\sigma \in S_k$ niech $\sigma' = \sigma \circ \tau$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(T)(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ...v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\sigma \cdot T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(j)}, ..., v_{\sigma(i)}, ..., v_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\sigma \cdot T(v_{\sigma'(1)}, ..., v_{\sigma'(i)}, ..., v_{\sigma'(j)}, ..., v_{\sigma'(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in S_k} -\mathrm{sgn}\sigma' \cdot T(v_{\sigma'(1)}, ..., v_{\sigma'(k)}) \\
&= -\mathrm{Alt}(T)(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ...v_k)
\end{aligned}$$

Jeśli $\omega \in \Omega^k(V)$, to $\omega(v_{\tau(1)}, ..., v_{\tau(k)}) = \mathrm{sgn}\tau \cdot \omega(v_1, ..., v_k) = -\omega(v_1, ..., v_k)$. Ponieważ każda permutacja jest złożeniem transpozycji, $\omega(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}\sigma \cdot \omega(v_1, ..., v_k)$ dla wszystkich $\sigma \in S_k$. Mamy więc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, ..., v_k) =& \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\sigma \cdot \omega(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) \\
=& \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\sigma \cdot \mathrm{sgn}\sigma \cdot \omega(v_1, ..., v_k) = \omega(v_1, ..., v_k).
\end{aligned}$$

Stąd $\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$. □

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(v_1, v_2) &= \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \mathrm{sgn}\sigma \cdot (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) \\
&= \frac{1}{2}(\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1)).
\end{aligned}$$

Stąd np. $\mathrm{Alt}(\varphi_1 \otimes \varphi_1) = 0$. Wprowadzimy teraz iloczyn zewnętrzny tensorów alternujących. Niech $\omega \in \Omega^k(V)$ i $\eta \in \Omega^j(V)$. Wtedy

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+j)!}{k!j!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \Omega^{k+j}(V) \tag{2.4}$$

W naszym przykładzie widzimy, że $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = -\varphi_2 \wedge \varphi_1$. Ponadto mamy

$$\begin{aligned}
(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta &= \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta, \\
\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) &= \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2, \\
a\omega \wedge \eta &= a(\omega \wedge \eta), \\
\omega \wedge \eta &= (-1)^{kj} \eta \wedge \omega, \\
f^*(\omega \wedge \eta) &= f^*(\omega) \wedge f^*(\eta) \\
(\omega \wedge \eta) \wedge \theta &= \omega \wedge (\eta \wedge \theta).
\end{aligned}$$

Dowód ostatniej własności jest dość skomplikowany i wynika z tego, że

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \mathrm{Alt}(\omega \otimes \mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta)) \tag{2.5}$$

oraz dla $\omega \in \Omega^k(V)$, $\eta \in \Omega^j(V)$ i $\theta \in \Omega^m(V)$

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \frac{(k+j+m)!}{k!j!m!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \omega \wedge (\eta \wedge \theta). \tag{2.6}$$

(2.5) i (2.6) stanowią treść twierdzenia 4.4 w książce Spivaka. Chcemy je zastosować do wyliczenia

$$\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k},$$

gdzie $\varphi_1, ..., \varphi_d$ jest bazą dualną. Mamy

$$\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k} = k!\mathrm{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{i_k}). \tag{2.7}$$

Pokażmy to indukcyjnie. Dla $k = 2$, (2.7) wynika z (2.4). Krok indukcyjny wynika z (2.4)-(2.6). Istotnie, niech $\omega = \varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_{k-1}}$, $\eta = \varphi_{i_k}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k} =& \frac{k!}{(k-1)!}\mathrm{Alt}((\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{k-1}) \otimes \varphi_{i_k}) \\
=& \frac{k!}{(k-1)!}\mathrm{Alt}((k-1)!\mathrm{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{k-1}) \otimes \varphi_{i_k}) \\
=& \frac{k!}{(k-1)!}(k-1)!\mathrm{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{k-1} \otimes \varphi_{i_k}) = k!\mathrm{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{i_k})
\end{aligned}$$

Z (2.7) wynika, że

$$\begin{aligned}
\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k}(v_1, ..., v_k) &= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\sigma \cdot \varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{i_k}(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\sigma \cdot \varphi_{i_1}(v_{\sigma(1)}) \cdot ... \cdot \varphi_{i_k}(v_{\sigma(k)}).
\end{aligned}$$

Idąc dalej możemy pokazać, że

$$\varphi_{i_{\eta(1)}} \wedge ... \wedge \varphi_{i_{\eta(k)}} = \mathrm{sgn}\eta \cdot \varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k}. \tag{2.8}$$

(2.8) wynika z tego, że jesli $\sigma = \xi \circ \eta$, to

$$\begin{aligned}
\varphi_{i_{\eta(1)}} \otimes ... \otimes \varphi_{i_{\eta(k)}}(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) =& \prod_m \varphi_{i_{\eta(m)}}(v_{\sigma(m)}) \\
=& \prod_m \varphi_{i_{\eta(m)}}(v_{\xi(\eta(m))}) \\
=& \prod_r \varphi_{i_r}(v_{\xi(r)}) \\
=& \varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{i_k}(v_{\xi(1)}, ..., v_{\xi(k)}).
\end{aligned}$$

Twierdzenie 2.9. *Zbiór wszystkich iloczynów*
$$\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k}, \quad 1 \le i_1 < ... < i_k \le d$$
jest bazą przestrzeni $\Omega^k(V)$, więc przestrzeń ta ma wymiar $\binom{d}{k}$.

Dowód. Jeśli $\omega \in \Omega^k(V)$, to $\omega \in \mathcal{T}^k(V)$
$$\omega = \sum a_{i_1,...,i_k} \varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{i_k}.$$
Więc
$$\omega = \mathrm{Alt}(\omega) = \sum a_{i_1,...,i_k} \mathrm{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{i_k}).$$
Ponieważ $k!\mathrm{Alt}(\varphi_{i_{\eta(1)}} \otimes ... \otimes \varphi_{i_{\eta(k)}}) = \mathrm{sgn}\eta \cdot \varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k}$, elementy $\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k}$ rozpinają $\Omega^k(V)$. □

2.1. **Pola i formy.** Dla każdego punktu $p \in \mathbb{R}^d$ definiujemy przestrzeń styczną w tym punkcie

(2.10) $$T_p\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d_p := \{(p, v) : v \in \mathbb{R}^d\} = \{p\} \times \mathbb{R}^d.$$

$T_p\mathbb{R}^d$ jest przestrzenią liniową z działaniami
$$(p, v) + (p, w) = (p, v + w), \quad a(p, v) = (p, av)$$
Wektor $v \in R^d$ przedstawia się jako strzałkę o początku w 0 i końcu w v. W tym języku (p, v) jest strzałką od p do $p + v$. Lepiej jest jednak myśleć, że (p, v) jest strzałką (wektorem) zaczepioną(ym) w p. Zbiór
$$T\mathbb{R}^d := \{(p, v) : p \in \mathbb{R}^d, v \in R^d\} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^d} T_p\mathbb{R}^d$$
nazywamy wiązką styczną do $\mathbb{R}^d$. Jest to najprostszy przykład wiązki stycznej do rozmaitości (tzw. trywialna wiązka wektorowa).

Dzięki tej konstrukcji zmodyfikujemy nieco definicję pola wektorowego. Poprzednio pole wektorowe było odwzorowaniem $F : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, $F(p) = (F_1(p), ..., F_d(p))$. Teraz
$$F : \mathbb{R}^d \mapsto T\mathbb{R}^d, \quad F(p) \in T_p\mathbb{R}^d$$
Zrobimy to tak, że w każdym punkcie p wybierzemy bazę standardową $(e_1)_p = (p, e_1), ..., (e_d)_p = (p, e_d)$ przestrzeni liniowej $T_p\mathbb{R}^d$. Piszemy
$$F(p) = F^1(p)(e_1)_p + ... + F^d(p)(e_d)_p = (p, \sum_{i=1}^d F^i(p)e_i).$$
Proszę zwrócić uwagę na to, że indeksy współrzędnych pola powędrowały na górę tak jak w Spivaku. Jest dla nas ważne, żeby $F(p) \in T_p\mathbb{R}^d$, a nie $F(p) \in \mathbb{R}^d$.

Jeśli przez E_i oznaczymy pole wektorowe takie, że $E_i(p) = (p, e_i) = (e_i)_p$, to
$$F = \sum_{i=1}^d F^i E_i.$$

Pola wektorowe można dodawać i mnożyć przez funkcje $g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$. Piszemy

$$(F + G)(p) = F(p) + G(p), \quad gF(p) = g(p)F(p).$$

W ten sposób otrzymujemy (nieskończenie wymiarową) przestrzeń liniową.

To samo co z wektorami, zrobimy teraz z 1-tensorami = funkcjonałami. Tzn. piszemy

$$T^*\mathbb{R}^d = \{(p, \varphi) : p \in R^d, \varphi \in (T_p\mathbb{R}^d)^* = \Omega^1(T_p\mathbb{R}^d)\} \approx \mathbb{R}^d \times \Omega^1(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^*.$$

Podobnie dla k - tensorów alternujących:

$$\Omega^k(T\mathbb{R}^d) := \{(p, \omega) : p \in R^d, \omega \in \Omega^k(T_p\mathbb{R}^d)\} \approx \mathbb{R}^d \times \Omega^k(\mathbb{R}^d).$$

$\approx$ ma tutaj znaczenie heurystyczne. Tak jak poprzednio w punkcie zaczepialiśmy wektor, teraz zaczepiamy tensor alternujący. Tak jak dla pól wektorowych będziemy rozważali odwzorowania $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^d \mapsto T^*\mathbb{R}^d$ i $\tilde{\omega} : \mathbb{R}^d \mapsto \Omega^k(T\mathbb{R}^d)$ spełniające

$$\tilde{\varphi}(p) \in T_p^*\mathbb{R}^d, \qquad \tilde{\omega}(p) \in \Omega^k(T_p\mathbb{R}^d).$$

Tak zdefiniowane $\tilde{\varphi}$ i $\tilde{\omega}$ nazywamy odpowiednio 1-formą i k-formą. Mówi się też, że $\tilde{\varphi}$ jest cięciem $T^*\mathbb{R}^d$, a $\tilde{\omega}$ cięciem $\Omega^k(T\mathbb{R}^d)$. Możemy mysleć, że

$$\tilde{\varphi}(p) = (p, \varphi), \quad \text{gdzie} \quad \varphi \quad \text{zależy od } p.$$

Rozważmy $\tilde{\varphi}_1, ..., \tilde{\varphi}_d$ takie, że

$$\tilde{\varphi}_i(p)((e_j)_p) = \delta_{ij} \quad \text{lub równoważnie} \quad \tilde{\varphi}_i(E_j) = \delta_{ij}.$$

Powyższa linijka ma sens, bo $(e_j)_p \in T_p\mathbb{R}^d$, $\tilde{\varphi}_i(p) \in T_p^*\mathbb{R}^d$. Wtedy dowolna 1-forma zapisuje się

$$\tilde{\varphi}(p) = \sum_{i=1}^{d} a_i(p)\tilde{\varphi}_i(p),$$

gdzie a_i są funkcjami na $\mathbb{R}^d$. W każdym punkcie zaczepiliśmy 1-tensor i dodatkowo wyraziliśmy go przez tensory $\tilde{\varphi}_1(p), ..., \tilde{\varphi}_d(p)$. Proszę zwrócić uwagę, że $\tilde{\varphi}_1, ..., \tilde{\varphi}_d$ nie stanowią bazy przestrzeni liniowej

$$\Gamma^1(\mathbb{R}^d) = \{\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^d \mapsto T^*\mathbb{R}^d : \tilde{\varphi}(p) \in T_p^*\mathbb{R}^d\},$$

bo a_i są funkcjami na $\mathbb{R}^d$, a nie liczbami.

Dla k-formy $\tilde{\omega}$ i j-formy $\tilde{\eta}$ definiujemy $\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta}$ wzorem

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta}(p) = \tilde{\omega}(p) \wedge \tilde{\eta}(p).$$

Zmienimy nieco oznaczenie:

$$dx^i := \tilde{\varphi}_i.$$

To oznaczenie wynika z tradycji i, jak się przekonamy przerabiając związki abstrakcyjnego twierdzenia Stokesa z całkowaniem na krzywych i powierzchniach, ma dodatkowy głębszy sens. W tej notacji

$$dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

jest k-formą taką , że

$$dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}(p) = \tilde{\varphi}_{i_1}(p) \wedge ... \wedge \tilde{\varphi}_{i_k}(p).$$

$dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}(p)$ stanowią bazę $\Omega^k(T_p\mathbb{R}^d)$. W takim razie k-formę $\tilde{\omega}$ możemy zapisać jako

$$\tilde{\omega} = \sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1,...,i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}, \tag{2.11}$$

gdzie $a_{i_1,...,i_k}$ są funkcjami na $\mathbb{R}^d$. Inaczej mówiąc

$$\tilde{\omega}(p) = \sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1,...,i_k}(p) \tilde{\varphi}_{i_1}(p) \wedge ... \wedge \tilde{\varphi}_{i_k}(p). \tag{2.12}$$

(2.11) i (2.12) są równoważne. Spivak używa notacji $\omega_{i_1,...,i_k} = a_{i_1,...,i_k}$ i nie używa tildy:

$$\omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} \omega_{i_1,...,i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k},$$

pisząc po prostu ω, nie $\tilde{\omega}$. Będziemy tak pisać. W tym momencie nadużywamy trochę notacji, bo poprzednio ω było tensorem alternującym, a teraz oznacza pole takich tensorów czyli formę, ale Spivak robi to samo.

Jeśli funkcje $\omega_{i_1,...,i_k}$ są ciągłe to forma ω nazywa się ciagła. Jeśli funkcje $\omega_{i_1,...,i_k}$ są C^1, C^2, C^∞ to forma ω nazywa się odpowiednio klasy C^1, C^2, C^∞. Najczęściej spotyka się formy klasy C^∞. Przestrzeń

$$\Gamma^k_m(\mathbb{R}^d) = \{\omega : \mathbb{R}^d \mapsto \Omega^k(T\mathbb{R}^d) : \omega(p) \in \Omega^k(T_p\mathbb{R}^d)\},$$

k-form klasy C^m stanowi przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$ z dodatkową strukturą mnożenia przez funkcje klasy C^m. Jest ona nieskończenie wymiarowa. Do naszych celów wystarczą formy klasy C^2. Przyjmijmy, że $\Gamma^k_0(\mathbb{R}^d)$ oznacza k-formy ciągłe, a $\Gamma^k(\mathbb{R}^d)$ k-formy gładkie czyli C^m dla każdego m.

Definicja 2.13. *Dla funkcji $g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ definiujemy jej różniczkę $dg \in \Gamma^1_0(\mathbb{R}^d)$ jako 1-formę*

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}\, dx^1 + ... + \frac{\partial g}{\partial x_d}\, dx^d.$$

Zwróćmy uwagę, że

$$dg(F^1E_1 + ... + F^dE_d) = \frac{\partial g}{\partial x_1} F^1 + ... + \frac{\partial g}{\partial x_d} F^d$$

jako funkcje na $\mathbb{R}^d$. Dla funkcji różniczkowalnej $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^m$ mamy odwzorowanie liniowe $Df(p) : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^m$. Nieznaczna modyfikacja daje odwzorowanie liniowe

$$f_* : T_p\mathbb{R}^d \mapsto T_{f(p)}\mathbb{R}^m$$

określone wzorem

$$f_*((p, v)) = (f(p), Df(p)(v))$$

lub inaczej

$$f_*(v_p) = (Df(p)(v_p))_{f(p)}.$$

f_* indukuje odwzorowanie liniowe

$$f^* : \Gamma^k_0(\mathbb{R}^m) \mapsto \Gamma^k_0(\mathbb{R}^d)$$

wzorem

$$(f^*\omega)(p)(v_1, ..., v_k) := \omega(f(p))(f_*(v_1), ..., f_*(v_k)) = \omega(f(p))(Df(p)(v_1), ..., Df(p)(v_k)).$$

Jesli $f \in C^\infty$ to

$$f^* : \Gamma^k(\mathbb{R}^m) \mapsto \Gamma^k(\mathbb{R}^d).$$

Zwróćmy uwagę na to, że $v_1, ..., v_k \in T_p\mathbb{R}^d$, a $f_*(v_1), ..., f_*(v_k) \in T_{f(p)}\mathbb{R}^m$.

Twierdzenie 2.14. *Jeśli $f = (f^1, ..., f^m) : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna, to*

- $f^*(dy^i) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\ dx^j = df^i$
- $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$
- $f^*(g \cdot \omega) = (g \circ f) \cdot f^*(\omega)$
- $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$,

gdzie $(y_1, ..., y_m)$ są współrzędnymi w $\mathbb{R}^m$.

Dowód. Niech $v \in T_p\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} f^*(dy^i)(p)(v) =&(dy^i)(f(p))(f_*(v)) = (dy^i)(f(p))(Df(p)(v)) \\ =&\sum_{j=1}^d \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)v^j \\ =&\sum_{j=1}^d \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)dx^j(v) = df^i(p)(v), \end{aligned}$$

bo dy^i wybiera i-tą współrzędną wektora. □

Rozszerzymy teraz operator różniczkowania na formy. Jeżeli

$$\omega = \sum_{i_1<...<i_k} \omega_{i_1,...,i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k},$$

to

$$\begin{aligned} d\omega =& \sum_{i_1<...<i_k} d\omega_{i_1,...,i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \\ =& \sum_{i_1<...<i_k} \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \omega_{i_1,...,i_k}}{\partial x^\alpha} \cdot dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $d : \Gamma^k(\mathbb{R}^d) \mapsto \Gamma^{k+1}(\mathbb{R}^d)$ (analogicznie $d : \Gamma^k_m(\mathbb{R}^d) \mapsto \Gamma^{k+1}_{m-1}(\mathbb{R}^d)$) oraz

$$d(\omega_{i_1,\dots,i_k}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}) = d\omega_{i_1,\dots,i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k} \tag{2.15}$$

i

$$d(\omega+\eta) = d\omega + d\eta,$$

co jest bardzo wygodne przy dowodzeniu własności operatora d.

Podstawowe własności różniczkowania zawarte są w następującym twierdzeniu

Twierdzenie 2.16. *Dla* $\omega\in\Gamma_1^k(\mathbb{R}^d), \eta\in\Gamma_1^m(\mathbb{R}^d)$ *mamy*

$$d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta.$$

Ponadto $d(d\omega)=0$ *jeśli* $\omega\in\Gamma_2^k(\mathbb{R}^d)$ *oraz jeśli* $f:\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}^m$ *jest* C^1*, to*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

W dowodzie twierdzenia korzystamy z (2.15) i addytywności różniczkowania co pozwala nam ograniczyć się do form postaci $\omega_{i_1,\dots,i_k}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$.

2.2. **Kostki i ich brzegi.**

Definicja 2.17. *Singularną kostką wymiaru* n *(*n*-kostką) nazywamy funkcję ciągłą* $c:[0,1]^n\mapsto\mathbb{R}^d$*, gdzie* $[0,1]^n$ *oznacza* n*-krotny iloczyn* $[0,1]\times\dots\times[0,1]$, $\mathbb{R}^0=[0,1]^0=\{0\}$.

0- kostka jest punktem. 1-kostka jest krzywą, a 2-kostka powierzchnią, o ile założymy dodatkowo, że c jest klasy C^1. Standardowa n-kostka w $\mathbb{R}^n$ jest definiowana jako $I^n:[0,1]^n\mapsto\mathbb{R}^n$, $I^n(x)=x$.

Dla każdego $1\le i\le n$ określmy dwie singularne kostki $I^n_{i,0}$ i $I^n_{i,1}$ jako funkcje z $[0,1]^{n-1}$ w $\partial I^n\subset\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} I^n_{i,0}(x^1,\dots,x^{n-1}) =& I^n(x^1,\dots,x^{i-1},0,x^i,\dots x^{n-1}) = (x^1,\dots,x^{i-1},0,x^i,\dots x^{n-1})\\ I^n_{i,1}(x^1,\dots,x^{n-1}) =& I^n(x^1,\dots,x^{i-1},1,x^i,\dots x^{n-1}) = (x^1,\dots,x^{i-1},0,x^i,\dots x^{n-1}).\end{aligned}$$

Kostkę $I^n_{i,0}$ nazywamy $(i,0)$-ścianą kostki I^n, a kostkę $I^n_{i,1}$ nazywamy $(i,1)$-ścianą. Są to dwie ściany składające się na brzeg równoległe do siebie, gdzie i-ta zmienna jest ustalona na 0 lub 1.

Przykład 2.18.

$$I^1_{1,0} = I^1(0) = 0 \quad \textit{lewy koniec odcinka } [0,1]$$

$$I^1_{1,1} = I^1(1) = 1 \quad \textit{prawy koniec odcinka } [0,1]$$

$$I^2_{1,0}(t) = I^1(0,t) \quad \textit{lewy pionowy bok kwadratu } [0,1]^2$$

$$I^2_{2,1}(t) = I^1(t,1) \quad \textit{górny poziomy bok kwadratu } [0,1]^2$$

Definicja 2.19. *Brzegiem kostki I^n nazywamy formalną sumę*

$$\partial I^n := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)}.$$

Dla I^1 otrzymujemy

$$\partial I^1 = (-1)^{1+0} I^1_{1,0} + (-1)^{1+1} I^1_{(1,1)} = -\{0\} + \{1\}$$

Dla I^2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \partial I^2 = &(-1)^1 I^2_{1,0} + (-1)^2 I^2_{(1,1)} && \text{pionowe odcinki} \\ &+(-1)^2 I^2_{2,0} + (-1)^3 I^2_{(2,1)} && \text{poziome odcinki.} \end{aligned}$$

Proszę zauważyć, że znaki zgadzają się z orientacją krzywych w twierdzeniu Greena. Dla dowolnej singularnej n-kostki $c : [0,1]^n \mapsto \mathbb{R}^d$ określamy (i,α) ścianę jako funkcję

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ I^n_{(i,\alpha)} : [0,1]^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^d. \tag{2.20}$$

Ścina $c_{(i,\alpha)}$ jest obrazem przez c ściany (i,α).

Definicja 2.21. *Brzegiem kostki $c : I^n \mapsto \mathbb{R}^d$ nazywamy formalną sumę*

$$\partial c := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}.$$

Dla 1-kostki $c : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^d$ mamy

$$\partial c = -\{c(0)\} + \{c(1)\}.$$

Teraz założymy, że k-kostka c jest klasy C^1 na wnętrzu $[0,1]^k$ i każda (k-1)-kostka $c_{(i,\alpha)}$ jest C^1 na wnętrzu $[0,1]^{k-1}$. Będziemy się starali zdefiniować

$$\int_c \omega \quad \text{dla k-formy } \omega.$$

Jeśli $\omega = f dx^1 \wedge ... \wedge dx^k$, to

$$\int_{I^k} \omega = \int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f$$

czyli

$$\int_{I^k} f dx^1 \wedge ... \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} f(x^1,...,x^k)\ dx^1 ... dx^k.$$

Jeśli ω jest k-formą na $\mathbb{R}^d$ i $c : [0,1]^k \mapsto \mathbb{R}^d$ jest singularną k-kostką, to określamy

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^* \omega.$$

Tu potrzebujemy, żeby c było klasy C^1. Dla 0-kostki i 0-formy $\omega = f$ piszemy

$$\int_c f = \int_c \omega = \omega(c(0)) = f(c(0)),$$

bo $c^*(f) = f \circ c$.

Przykład 2.22. *Niech $c : [0,1] \mapsto [a,b] \subset \mathbb{R}$. Wtedy*

$$\int_c f dt = \int_{[0,1]} f \circ c(t) c^*(dt) = \int_0^1 f \circ c(t) \frac{dc}{dt}(t)\ dt = \int_0^1 f \circ c(t) c'(t)\ dt = \int_a^b f(s)\ ds.$$

Rozpoznajemy twierdzenie o zamianie zmiennych.

Przykład 2.23. *Niech $c : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^3$. Wtedy*

$$\int_c F_1 dx^1 + F_2 dx^2 + F_3 dx^3 = \int_{[0,1]} c^*(F_1 dx^1 + F_2 dx^2 + F_3 dx^3) = \int_0^1 \langle F(c(t)), c'(t)\rangle\ dt,$$

gdzie $c'(t)$ jest wektorem stycznym do krzywej. Rozpoznajemy całkę zorientowaną po krzywej.

Przykład 2.24. *Niech $c : [0,1]^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Przyjmijmy, że (u,v) stanowią współrzędne w $[0,1]^2$, a (x,y) w $c([0,1]^2)$ i załóżmy, że $det Dc$ nie znika w żadnym punkcie czyli ma stały znak, bo $[0,1]^2$ jest wypukły. Wtedy*

$$\int_c f dx^1 \wedge dx^2 = \int_{[0,1]^2} c^*(f dx^1 \wedge dx^2) = \int_{[0,1]^2} f \circ c(u,v) \det Dc(u,v)\ du \wedge dv.$$

Rozpoznajemy twierdzenie o zamianie zmiennych ze znakiem, bo formy uwzględniają orientację w $\mathbb{R}^2$. Orientacja zadana przez e_1, e_2 jest czym innym niż orientacja zadana przez e_2, e_1 i wyraża się znakiem Jakobianu c. Jesli chcemy uchwycić znak w twierdzeniu o zamianie zmiennych, to musimy całkować formy, nie pisać $dx^1 dx^2$. Jeśli c nie zmienia orientacji, to

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^2} f \circ c(u,v) \det Dc(u,v)\ du \wedge dv &= \int_{[0,1]^2} f \circ c(u,v) \det Dc(u,v)\ dudv \\ &= \int_{c([0,1]^2)} f(x^1, x^2) dx^1 dx^2.\end{aligned}$$

Przykład 2.25. *Niech $c : [0,1]^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią. Wtedy*

$$\begin{aligned}\int_c F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy &= \int_{[0,1]^2} c^*(F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy) \\ &= \int_{[0,1]^2} \langle F(c(u,v)), T_u \times T_v\rangle\ dudv.\end{aligned}$$

Trzeba pracowicie wyliczyć współrzędne $T_u \times T_v$.

Dla $k-1$ formy ω definiujemy

$$\int_{\partial c} \omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \int_{c_{(i,\alpha)}} \omega. \tag{2.26}$$

Twierdzenie 2.27 (Stokesa). *Jeśli ω jest $k-1$-formą na zbiorze otwartym U zawartym w $\mathbb{R}^d$ i c jest kostką w U, to*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Przykład 2.28. $c = I^1$. *Wtedy*

$$f(1) - f(0) = \int_{\partial I^1} f \underset{Stokes}{=} \int_{I^1} df = \int_{[0,1]} f'(x)\ dx.$$

Przykład 2.29. $c : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^3$. *Całkujemy df po krzywej. Wtedy*

$$\begin{aligned} f(c(1)) - f(c(0)) &= \int_{\partial c} f \underset{Stokes}{=} \int_c df \\ &= \int_c \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\ dx^i \\ &= \int_{[0,1]} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ c(t)\ \frac{\partial c_i}{dt}\ dt \\ &= \int_{[0,1]} \langle \nabla f, c'(t) \rangle\ dt. \end{aligned}$$

Rozpoznajemy twierdzenie o polu gradientowym.

Przykład 2.30. *$c : [0,1]^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ i $\det Dc > 0$. Całkujemy 1-formę $Pdx + Qdy$ po brzegu obszaru. Wtedy otrzmujemy twierdzenie Greena. Istotnie,*

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}\int_{c_{(i,\alpha)}} Pdx + Qdy \underset{Stokes}{=} \int_c \frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy$$

$$= \int_c \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\wedge dy$$

$$= \int_{c([0,1]^2)} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}\int_{[0,1]} c^*_{(i,\alpha)}(Pdx + Qdy)$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}\int_{[0,1]} P\circ c_{(i,\alpha)}\frac{d(c_{(i,\alpha)})_1}{dt}\ dt + Q\circ c_{(i,\alpha)}\frac{d(c_{(i,\alpha)})_2}{dt}\ dt$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}\int_0^1 \langle (P,Q)\circ c_{(i,\alpha)}(t), c'_{(i,\alpha)}(t)\rangle\ dt$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}\int_{c_{(i,\alpha)}} (P,Q)\circ ds = \int_\sigma (P,Q)\circ ds$$

gdzie σ jest parametryzacją brzegu zgodną z tą taką jaką stosowaliśmy w klasycznym dowodzie, patrz też Uwaga 1.29 i rozważania po nią. Ostatnia równość wymaga przemyślenia.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $c = I^k$, $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k$ oraz ω jest $k-1$-formą na otoczeniu $[0,1]^k$. Wówczas ω jest sumą $(k-1)$-form postaci

$$fdx^1\wedge ...\wedge \widehat{dx^i}\wedge ...\wedge dx^k = f(x^1,...,x^k)dx^1\wedge ...\wedge \widehat{dx^i}\wedge ...\wedge dx^k,$$

gdzie $\widehat{dx^i}$ oznacza, że formy dx^i nie ma w wyrażeniu. Z własności d wystarczy pokazać twierdzenie dla $\omega = fdx^1\wedge ...\wedge\widehat{dx^i}\wedge ...\wedge dx^k$. Zacznijmy od całki po brzegu. Zauważmy, że

$(I^k_{(j,\alpha)})^*(fdx^1\wedge ...\wedge \widehat{dx^i}\wedge ...\wedge dx^k) = 0$ jeśli $j\neq i$,

$(I^k_{(i,\alpha)})^*(fdx^1\wedge ...\wedge \widehat{dx^i}\wedge ...\wedge dx^k) = f(x^1,...,x^{i-1},\alpha,x^i,...,x^{k-1})dx^1\wedge ...\wedge dx^{k-1}$ jeśli $j\neq i$,

ponieważ

$$(I^k_{j,\alpha})^*(dx^j) = 0$$

$$(I^k_{i,\alpha})^*(dx^j) = \begin{cases} dx^j & j<i \\ dx^{j-1} & j>i \end{cases}$$

i w wyniku cofania mamy otrzymać formę na $[0,1]^{k-1}$. Stąd

$$\int_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{(i,\alpha)})^*(f dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^k) = \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, ..., x^{i-1}, \alpha, x^i, ..., x^{k-1}) dx^1 ... dx^{k-1}$$
$$= \int_{[0,1]^k} f(x^1, ..., x^{i-1}\alpha, x^{i+1}, ..., x^k) dx^1 ... dx^k.$$

Dlatego

$$\int_{\partial I^k} f dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{(j,\alpha)})^*(f dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^k)$$
$$= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} f(x^1, ..., x^{i-1}, 1, x^{i+1}, ..., x^{k-1}) dx^1 ... dx^k$$
$$+ (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x^1, ..., x^{i-1}, 0, x^{i+1}, ..., x^{k-1}) dx^1 ... dx^k.$$

Z drugiej strony, jeśli $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, to

$$\int_{I^k} d(f dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^k) = \int_{[0,1]^k} D_i f dx^i \wedge dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^k)$$
$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} D_i f dx^1 \wedge ... \wedge dx^k$$
$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} D_i f(x^1, ..., x^k) dx^1 ... dx^k,$$

bo dla $j \neq i$, $D_j f \; dx^j \wedge dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^k = 0$, gdyż dx^j wystąpi dwa razy.

Z twierdzenia Fubiniego i zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego mamy

$$\int_{I^k} d(f dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^k) = (-1)^{i-1} \int_0^1 ... \left(\int_0^1 D_i f(x^1, ..., x^k) dx^i \right) dx^1 ... \widehat{dx^i} ... dx^k$$
$$= (-1)^{i-1} \int_0^1 ... \int_0^1 \big(f(x^1, ..., 1, ..., x^k) - f(x^1, ..., 0, ..., x^k) \big)$$
$$\times dx^1 ... \widehat{dx^i} ... dx^k$$
$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} f(x^1, ... x^{i-1}, 1, x^{i+1}, ..., x^k) dx^1 ... dx^k$$
$$+ (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x^1, ... x^{i-1}, 0, x^{i+1}, ..., x^k) dx^1 ... dx^k.$$

Zwróćmy uwagę, że rozumowanie jest takie samo jak w twierdzeniu Greena. Stąd

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega.$$

Jeśli c jest dowolną kostką, to na mocy (2.20) i (2.26).

$$\int_{\partial c} \omega = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \int_{c_{(i,\alpha)}} \omega$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \int_{I^k_{(i,\alpha)}} c^*\omega = \int_{\partial I^k} c^*\omega.$$

Dlatego

$$\int_c d\omega = \int_{I^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) \underset{Stokes}{=} \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

□

3. Całki powierzchniowe

3.1. Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$.

Definicja 3.1. *Powierzchnią nazywamy $S = \Phi(D)$, gdzie $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ i D jest podzbiorem płaszczyzny. Stosujemy zapis*

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

Mówimy, że powierzchnia jest klasy C^1 jeśli D ma niepuste wnętrze, a funkcje x, y i z są klasy C^1 na wnętrzu D.

Dalej będziemy rozważali wyłącznie powierzchnie klasy C^1. Przykładem powierzchni jest wykres funkcji dwu zmiennych $z = f(x, y)$. Wtedy $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Można zmienne zamienić rolami i otrzymać $x = h(y, z)$ lub $y = g(x, z)$.

Przykład 3.2. $x = z - z^3$. *W płaszczyźnie xz wykresem jest krzywa trzeciego stopnia. Do wykresu wraz punktem $(z - z^3, 0, z)$ należy też cała prosta $(z - z^3, y, z)$ równoległa do osi y. Wykres ma postać wygiętego nieskończonego arkusza papieru.*

$$\Phi(y, z) = (z - z^3, y, z), \quad D = \mathbb{R}^2.$$

Przykład 3.3. *Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. $\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$,*

$$\Phi(\varphi, \theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi), \quad D = [0, \pi] \times [0, 2\pi).$$

Zauważmy, że Φ jest 1-1 i C^1 na D, bo jest określone na otoczeniu D, a dokładniej na $\mathbb{R}^2$.

Przykład 3.4. *Cylinder. $\Phi : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$,*

$$\Phi(u, \theta) = (\cos\theta, \sin\theta, u), \quad D = \mathbb{R} \times [0, 2\pi).$$

Zauważmy, że Φ jest 1-1 i C^1 na D bo jest określone na otoczeniu D, a dokładniej na $\mathbb{R}^2$.

Przykład 3.5. *Dwa stożki:* $x^2 + y^2 = z^2$. $\Phi : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u, \theta) = (u \cos\theta, u \sin\theta, u), \quad D = \mathbb{R} \times [0, 2\pi).$$

Zauważmy, że Φ *jest 1-1 na wnętrzu* D*, ale nie na* D*. Za to* Φ *jest* C^1 *na* D *bo jest określone na otoczeniu* D*, a dokładniej na* $\mathbb{R}^2$*.*

3.2. **Płaszczyzna styczna do powierzchni.** Rozważamy odwzorowanie

$$\gamma(t) = (x(t, v_0), y(t, v_0), z(t, v_0)) = \Phi(t, v_0),$$

gdzie (u_0, v_0) jest ustalonym punktem w D. To odwzorowanie opisuje krzywą w $\mathbb{R}^3$ leżącą w powierzchni S i przechodzącą w chwili $t = u_0$ przez punkt

$$\Phi(u_0, v_0) =: (x_0, y_0, z_0).$$

Wektorem stycznym do tej krzywej w punkcie (x_0, y_0, z_0) jest

$$T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right).$$

Podobnie rozpatrując krzywą $t \to \Phi(u_0, t)$ otrzymamy inny wektor styczny w punkcie (x_0, y_0, z_0)

$$T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

T_u i T_v są wektorami stycznymi w punkcie (x_0, y_0, z_0) do krzywych leżących w powierzchni S. Płaszczyzna rozpięta przez te wektory jest zatem styczna do powierzchni w tym punkcie. Wektorem normalnym do powierzchni w (x_0, y_0, z_0) nazywamy wektor $T_u \times T_v$ prostopadły do obu wektorów stycznych.

Definicja 3.6. *Mówimy, że powierzchnia jest gładka w punkcie* $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ *jeśli* $T_u \times T_v \neq 0$*. Intuicyjnie oznacza to, że punkt* (x_0, y_0, z_0) *nie leży na krawędzi ani też nie jest rogiem powierzchni.*

Przykład 3.7. *Dwa stożki:* $x^2 + y^2 = z^2$. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$. *Powierzchnia jest klasy* C^1*. Mamy*

$$T_u = (\cos v, \sin v, 1), \qquad T_v = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

Wektory T_u *i* T_v *są równoległe tylko, gdy* $T_v = 0$*. Tzn.* $u = 0$*. Zauważmy, że powierzchnia jest zapisana równaniem* $x^2 + y^2 = z^2$*, czyli opisuje dwa stożki stykające się w początku układu. Intuicyjnie widać, że we wspólnym wierzchołku stożków powierzchnia zachowuje się inaczej.*

Przypuśćmy, że powierzchnia jest gładka w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$. Wtedy równanie płaszczyzny stycznej ma postać

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \circ \tilde{n} = 0,$$

gdzie $\tilde{n} = T_u \times T_v$ obliczone w (u_0, v_0).

Uwaga 3.8.

$$(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)=\left(\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right).$$

Otrzymany wektor jest prostopadły do (a_1,b_1,c_1) *i* (a_2,b_2,c_2)*. Rzeczywiście*

$$a_1\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=0.$$

Przykład 3.9. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u^2+v^2$. *Chcemy znaleźć punkty, w których płaszczyzna styczna jest dobrze określona.*

Mamy $D=[0,\infty)\times[0,2\pi)$ i

$$T_u=(\cos v,\sin v,2u),\qquad T_v=(-u\sin v,u\cos v,2v).$$

$$T_u\times T_v=\left(\begin{vmatrix}\sin v & 2u\\ u\cos v & 2v\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2u & \cos v\\ 2v & -u\sin v\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\cos v & \sin v\\ -u\sin v & u\cos v\end{vmatrix}\right)$$
$$=(2v\sin v-2u^2\cos v,-2u^2\sin v-2v\cos v,\ u).$$

Zatem $T_u\times T_v=0$ tylko, gdy $u=v=0$. Zauważmy, że $(0,0)\in\partial D$. Przykładowo w punkcie $(u_0,v_0)=(1,0)$ mamy

$$(x_0,y_0,z_0)=(1,0,1),\qquad T_u\times T_v\Big|_{\substack{u=1\\ v=0}}=(-2,0,1).$$

Równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1,0,1)$ ma zatem postać

$$-2(x-1)+(z-1)=0$$

czyli po uproszczeniu

$$2x-z=1.$$

Przykład 3.10. *Helikoida jest opisana przez*

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=\theta,$$

dla parametrów spełniających $0\le r\le 1$, $0\le\theta\le 2\pi$. *Znów* Φ *jest klasy* C^1 *na otoczeniu* D. *Dla ustalonej wartości kąta* θ *otrzymujemy odcinek prostopadły do osi* z *łączący punkty* $(0,0,\theta)$ *i* $(\cos\theta,\sin\theta,\theta)$. *Powstała powierzchnia przypomina wałek do mielenia mięsa. Mamy*

$$T_r=(\cos\theta,\sin\theta,0),\qquad T_\theta=(-r\sin\theta,r\cos\theta,1).$$

Przypuśćmy, że powierzchnia jest wykresem funkcji $z=f(x,y)$, dla $(x,y)\in D$. Naturalną parametryzacją jest $x:=x$, $y:=y$ i $z=f(x,y)$. Wtedy

$$T_x=\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad T_y=\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad T_x\times T_y=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right).$$

Równanie płaszczyzny stycznej w punkcie (x_0, y_0, z_0), gdzie $z_0 = f(x_0, y_0)$ to

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \circ \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) = 0.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0),$$

gdzie pochodne cząstkowe obliczane są w punkcie (x_0, y_0).

Przykład 3.11. *Odwzorowania* $\Phi_1(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *i* $\Phi_2(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2), (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ *parametryzują tę samą powierzchnię. Dla pierwszej parametryzacji mamy*

$$T_x = (1, 0, 2x), \quad T_y = (0, 1, 2y),$$

a dla drugiej

$$T_u = (\cos v, \sin v, 2u), \quad T_v = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

T_x, T_y *są wszędzie liniowo niezależne, podczas, gdy* $T_v = 0$*, gdy* $u = 0$*. W drugiej parametryzacji* $\{0\} \times [0, 2\pi) \subset \partial D$*.*

Przykład 3.12. *Chcemy sparametryzować powierzchnię (hiperboloidę) o równaniu* $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ *i wyliczyć wektory styczne.*

Dla ustalonej wartości z punkty (x, y) leżą na okręgu o środku w $(0, 0)$ i promieniu $\sqrt{z^2 + 1} = r \geq 1$. Możemy przyjąć, że

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Mamy $r^2 - z^2 = 1$. Zatem możemy przyjąć

$$r = \cosh \psi, \quad z = \sinh \psi, \quad \psi \in \mathbb{R}.$$

Ostatecznie uzyskujemy

$$\begin{aligned} x &= \cosh \psi \cos \varphi, \\ y &= \cosh \psi \sin \varphi, \\ z &= \sinh \psi, \end{aligned}$$

$\psi \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0, 2\pi)$. Φ jest różnowartościowe na wnętrzu $\mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ zbioru D. Mamy

$$\begin{aligned} T_\varphi &= (-\cosh \psi \sin \varphi, \cosh \psi \cos \varphi, 0) \\ T_\psi &= (\sinh \psi \cos \varphi, \sinh \psi \sin \varphi, \cosh \psi). \end{aligned}$$

T_φ, T_ψ są liniowo niezależne w każdym punkcie i

$$T_\varphi \times T_\psi = (\cosh^2 \psi \cos \varphi, \cosh^2 \psi \sin \varphi, -\cosh \psi \sinh \psi).$$

Przykład 3.13. *Torus uzyskujemy obracając wokół osi* z *okrąg o promieniu* r *tak, że środek małego okręgu jest w punkcie* $(R \cos \psi, R \sin \psi, 0)$*.*

Równanie małego okręgu w płaszczyźnie (x,z) $(y=0)$ ma postać

$$x = R + r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Żeby otrzymać równanie parametryzację małego okręgu, którego środek ma współrzędne $(R\cos\psi, R\sin\psi, 0)$ musimy wykonać obrót o kąt ψ wokół osi z. Wtedy

$$\begin{vmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R + r\cos\varphi \\ 0 \\ r\sin\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\psi(R + r\cos\varphi) \\ \sin\psi(R + r\cos\varphi) \\ r\sin\varphi \end{vmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} x &= d\cos\psi = (R + r\cos\varphi)\cos\psi, \\ y &= d\sin\psi = (R + r\cos\varphi)\sin\psi, \\ z &= r\sin\varphi. \end{aligned}$$

3.3. **Pole powierzchni.**

Definicja 3.14. *Niech S będzie powierzchnią sparametryzowaną przez funkcję $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$. Tzn. $S = \Phi(D)$. Załóżmy, że Φ jest różnowartościowe i klasy C^1 na wnętrzu D. Polem powierzchni nazywamy liczbę*

$$A(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\| \, du \, dv,$$

o ile całka jest dobrze określona. Tzn. trzeba dorzucić założenie, że D jest ograniczony, ∂D jest miary 0, a funkcja $\|T_u \times T_v\|$ jest ograniczona na D lub przynajmniej taka, że całka niewłaściwa istnieje.

Uwaga 3.15. *W naszych przykładach zwykle Φ jest klasy C^1 na otoczeniu ograniczonego zbioru $\bar{D}$ więc $\|T_u \times T_v\|$ jest ciągła na $\bar{D}$ czyli ograniczona.*

Przeanalizujmy sumy całkowe całki określającej $A(S)$. Załóżmy, że D jest prostokątem podzielonym na n^2 małych prostokątów R_{ij}. Wtedy

$$\Phi(D) = \bigcup_{i,j=1}^{n} \Phi(R_{ij}).$$

Prostokąty R_{ij} nie są rozłączne, bo mogą mieć wspólne boki. Ale część wspólna każdych dwu zbiorów postaci $\Phi(R_{ij})$ ma miarę zero. Zatem

$$A(S) = \sum_{i,j=1}^{n} A(\Phi(R_{ij})).$$

Rozważamy mały prostokąt R w płaszczyźnie u,v o lewym dolnym rogu w punkcie (u,v) a prawym górnym w $(u+\Delta u, v+\Delta v)$. Obraz $\Phi(R)$ jest w przybliżeniu równoległobokiem o bokach

$$\Phi(u+\Delta u,v)-\Phi(u,v) \approx \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v),\frac{\partial y}{\partial u}(u,v),\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)\Delta u,$$
$$\Phi(u,v+\Delta v)-\Phi(u,v) \approx \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v),\frac{\partial y}{\partial v}(u,v),\frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)\Delta v.$$

Istotnie,

$$D\Phi(u,v)=[T_u,T_v] \quad \text{jest macierzą 3 na 2.}$$

Czyli

$$\Phi(u+\Delta u,v)-\Phi(u,v) \approx [T_u,T_v]\begin{bmatrix}\Delta u\\ 0\end{bmatrix}=T_u(u,v)\,\Delta u,$$
$$\Phi(u,v+\Delta v)-\Phi(u,v) \approx [T_u,T_v]\begin{bmatrix}0\\ \Delta v\end{bmatrix}=T_v(u,v)\,\Delta v.$$

Pole równoległoboku wynosi $A(\varphi(R))\approx\|T_u\times T_v\|\,\Delta u\Delta v$. Rzeczywiście niech $\mathbf{n}=\frac{T_u\times T_v}{\|T_u\times T_v\|}$. Wtedy

$$A(\varphi(R))\approx|\det(\mathbf{n},T_u\,\Delta u,T_v\,\Delta v)|=\|T_u\times T_v\|\,\Delta u\,\Delta v.$$

Ostatecznie

$$A(S)=\sum_{i,j=1}^{n}\|T_u\times T_v\|_{\substack{u=u_{i-1}\\ v=v_{j-1}}}\Delta u_i\,\Delta v_j\longrightarrow\iint_D\|T_u\times T_v\|\,du\,dv.$$

Przykład 3.16. *Kawałek stożka.* $D=\{(r,\theta):0\le\theta\le2\pi,\ 0\le r\le1\}$, ∂D *ma miarę zero. Określamy* $\Phi(r,\theta)=(x,y,z)$, *gdzie*

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=r.$$

Obliczamy

$$T_r=(\cos\theta,\sin\theta,1),\quad T_\theta=(-r\sin\theta,r\cos\theta,0).$$

Zatem

$$T_r\times T_\theta=(-r\cos\theta,-r\sin\theta,r),\quad \|T_r\times T_\theta\|=r\sqrt{2}.$$

Dla $S=\Phi(D)$ *mamy więc*

$$A(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\|T_r\times T_\theta\|\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{2}\,dr\,d\theta=\pi\sqrt{2}.$$

Φ *jest klasy* C^1 *na otoczeniu* D. *Zwróćmy uwagę, że mamy tu parametryzację, a nie zamianę zmiennych, więc nie pojawia się dodatkowe* r.

Załóżmy, że powierzchnia jest wykresem funkcji $z=g(x,y)$, dla $(x,y)\in D$. Wtedy

$$T_x\times T_y=\left(-\frac{\partial g}{\partial x},-\frac{\partial g}{\partial y},1\right),$$

zatem

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Przykład 3.17. *Obliczymy pole półsfery o promieniu 1.*

Mamy

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Niech

$$D_R = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \le R^2\}, \quad R < 1.$$

Wtedy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Zatem

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} A(S_R) = \iint_{D_R} \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r\, dr\, d\theta}{\sqrt{1 - r^2}} \quad \text{zamiana zmiennych} \\ &= 2\pi \left(-\sqrt{1 - r^2}\right) \Big|_{r=0}^{r=R} = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - R^2}\right) \underset{R \to 1^-}{\longrightarrow} 2\pi. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że w tym wypadku $\|T_x \times T_y\| \to \infty$, gdy $x^2 + y^2 \to 1$, ale wciąż całka niewłaściwa istnieje. Można oczywiście zastosować inną parametryzację tak jak we współrzędnych sferycznych. Wtedy nie będzie całki niewłaściwej, ale komplikacja rachunków jest podobna.

3.4. **Całki powierzchniowe funkcji skalarnych (niezorientowane).** Rozważamy powierzchnię S sparametryzowaną za pomocą funkcji
$\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(D) = S$,

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Dla funkcji ciągłej $f(x, y, z)$ określonej na S definiujemy całkę wzorem

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\, \|T_u \times T_v\|\, du\, dv.$$

Po rozpisaniu otrzymujemy wyrażenie

$$\iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2}\, du\, dv,$$

przy czym

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Przypuśćmy, że funkcja $\varrho(x,y,z)$ opisuje gęstość masy powierzchni S w punkcie (x,y,z). Chcemy obliczyć całkowitą masę powierzchni. Załóżmy, że D jest prostokątem. Dzielimy D na n^2 mniejszych prostokątów D_{ij}. Oznaczmy $S_{ij} = \Phi(D_{ij})$. Symbol $A(S_{ij})$ oznacza pole powierzchni fragmentu S_{ij}. Dla dużych wartości n fragment S_{ij} jest "mały". Uznajemy, że gęstość masy na S_{ij} jest stała i wynosi $\varrho(\Phi(u_i,v_j))$, gdzie $(u_i,v_j) \in D_{ij}$ (np. (u_i,v_j) jest prawym górnym rogiem prostokąta D_{ij}). Całkowita masa wynosi w przybliżeniu

$$\begin{aligned}\sum_{ij,j=1}^{n} \varrho(\Phi(u_i,v_j))\, A(S_{ij}) &\approx \sum_{ij,j=1}^{n} \varrho(\Phi(u_i,v_j))\, \|T_u \times T_v\|\Big|_{\substack{u=u_i\\ v=v_j}} \Delta u_i\, \Delta v_j \\ &\longrightarrow \iint_D \varrho(\Phi(u,v))\, \|T_u \times T_v\|\, du\, dv \\ &= \iint_D \varrho(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, \|T_u \times T_v\|\, du\, dv.\end{aligned}$$

Przykład 3.18. *Rozważamy funkcję $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1}$ i helikoidę S określoną przez*

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = \theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ 0 \le r \le 1.$$

Wtedy $\|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{r^2+1}$. Zatem

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2+1}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\sqrt{r^2+1}\, dr\, d\theta = 2\pi\left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{8\pi}{3}.$$

Przykład 3.19. *Policzmy $\iint_S z^2\, dS$, gdzie S jest sferą jednostkową $x^2+y^2+z^2=1$. Można użyć do obliczeń współrzędnych sferycznych. Inaczej, zauważamy, że*

$$\iint_S z^2\, dS = \iint_S x^2\, dS = \iint_S y^2\, dS.$$

Zatem

$$\iint_S z^2\, dS = \frac{1}{3}\iint_S (x^2+y^2+z^2)\, dS = \frac{1}{3}\iint_S dS = \frac{1}{3}A(S) = \frac{4\pi}{3}.$$

Przypuśćmy, że powierzchnia S jest wykresem funkcji $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D$. Wtedy

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \tag{3.20}$$

bo
$$T_x \times T_y = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right),$$
a wektorem normalnym do powierzchni w punkcie (x, y, z) jest wektor jednostkowy
$$\mathbf{n} = \frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Przykład 3.21. *Powierzchnia S jest określona przez $z = x^2 + y$ dla (x, y) z prostokąta D opisanego przez warunki $0 \le x \le 1$ i $-1 \le y \le 1$. Wtedy $T_x \times T_y = (-2x, 1, 1)$ i*
$$\iint_S x\, dS = \int_0^1 \int_{-1}^1 x\sqrt{4x^2 + 2}\, dy\, dx = 2\sqrt{2} \int_0^1 x\sqrt{2x^2 + 1}\, dx$$
$$= 2\sqrt{2}\, \frac{1}{6}(2x^2 + 1)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{3}[3\sqrt{3} - 1].$$

Przykład 3.22. *Obliczyć $\iint_S x\, dS$, gdzie S jest trójkątem o wierzchołkach $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$.*

Równanie powierzchni to $x + y + z = 1$, czyli $z = 1 - x - y$, dla (x, y) z trójkąta D w płaszczyźnie (x, y) opisanego przez $x, y \ge 0$ i $x + y \le 1$. Mamy $T_x \times T_y = (1, 1, 1)$. Zatem
$$\iint_S x\, dS = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x\sqrt{3}\, dy.$$
Inaczej:
$$\iint_S x\, dS = \frac{1}{3} \iint_S \underbrace{(x + y + z)}_{1}\, dS = \frac{1}{3} A(S) = \frac{1}{3}\, \frac{\sqrt{3}}{4}\, (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

3.5. Całki powierzchniowe pól wektorowych (zorientowane).

Definicja 3.23. *Niech $F(x, y, z)$ będzie polem wektorowym określonym na powierzchni $S = \Phi(D)$, $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$. Określamy całkę powierzchniową zorientowaną wzorem*
$$\iint_{S_\Phi} F \circ dS = \iint_D F \circ (T_u \times T_v)\, du\, dv,$$
gdzie w całce po prawej stronie $F = F(\Phi(u, v))$.

Możemy powiązać tę całkę z całką niezorientowaną. Załóżmy, że $T_u \times T_v \ne 0$. Wtedy dla $\mathbf{n} = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$ mamy
$$\iint_D F \circ (T_u \times T_v)\, du\, dv = \iint_D (F \circ \mathbf{n})\, \|T_u \times T_v\|\, du\, dv = \iint_S (F \circ \mathbf{n})\, dS.$$

Otrzymujemy więc
$$\iint_{S_\Phi} F\circ dS = \iint_S (F\circ \mathbf{n})\, dS.$$
Zwrot wektora normalnego $\mathbf{n}$ zależy od parametryzacji, nawet od kolejności zmiennych u i v, bo $T_u \times T_v = -(T_v\times T_u)$.

Przykład 3.24. *Niech S będzie sferą jednostkową oraz $F(x,y,z)=(x,y,z)$. Wyliczymy $\iint_{S_\Phi} F\circ dS$ dla Φ danego przez współrzędne sferyczne.*

$$\begin{aligned} x &= \sin\varphi\cos\psi,\\ y &= \sin\varphi\sin\psi,\\ z &= \cos\varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_\varphi &= (\cos\varphi\cos\psi, \cos\varphi\sin\psi, -\sin\varphi),\\ T_\psi &= (-\sin\varphi\cos\psi, \sin\varphi\cos\psi, 0), \end{aligned}$$

zatem
$$T_\varphi\times T_\psi = (\sin^2\varphi\cos\psi, \sin^2\varphi\sin\psi, \cos\varphi\sin\varphi) = \sin\varphi\,(x,y,z).$$
Wektor normalny to
$$\mathbf{n}=(x,y,z).$$
$$\iint_{S_\Phi} F\circ dS = \iint_S (\mathbf{n}\circ\mathbf{n})\, dS = \iint_S dS = 4\pi.$$
Intuicyjnie (geometrycznie) w każdym punkcie powierzchni mamy dwa wektory normalne n_1 i n_2, $n_2=-n_1$. Załóżmy, że w każdym punkcie wybraliśmy jeden wektor normalny n tak, że wybrane wektory wskazują jedną stronę powierzchni. Mówimy, że mamy wybraną orientację powierzchni.

Dokładniej, niech $\Phi : D\to\mathbb{R}^3$ będzie parametryzacją powierzchni S gładką w każdym punkcie. Wektor $T_u\times T_v$ jest prostopadły do powierzchni S w punkcie $\Phi(u,v)$. Pole wektorowe
$$\mathbf{n}_\Phi = \frac{T_u\times T_v}{\|T_u\times T_v\|}$$
zadaje jej orientację. Załóżmy, że mamy inną parametryzację $\Phi_1 : D_1\to S$ gładką w każdym punkcie oraz że zbiory D, D_1 są spójne, to
$$n_\Phi = n_{\Phi_1} \quad \text{lub} \quad n_\Phi = -n_{\Phi_1}.$$
W pierwszym przypadku mówimy, że parametryzacje są zgodne, a w drugim przeciwne.

Niech S będzie wykresem funkcji $z = g(x,y)$. Orientacja jest wyznaczona przez

$$\mathbf{n} = \frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \text{lub} \quad \mathbf{n} = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, -1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Mamy dwie klasy abstrakcji.

Twierdzenie 3.25. *Niech S będzie powierzchnią zorientowaną, a $\Phi_1 : D_1 \mapsto S$ i $\Phi_2 : D_2 \mapsto S$ dwiema parametryzacjami gładkimi w każdym punkcie. Załóżmy, że zbiory D_1, D_2 są spójne, i $\Phi_1 = \Phi_2 \circ g$, $g : D_1 \mapsto D_2$, $\det Dg \neq 0$ w każdym punkcie. Wtedy*

$$\iint_{S_{\Phi_1}} F \circ dS = \iint_{S_{\Phi_2}} F \circ dS, \quad \textit{gdy} \ \det Dg > 0.$$

Jeśli $\det Dg < 0$, *to*

$$\iint_{S_{\Phi_1}} F \circ dS = -\iint_{S_{\Phi_2}} F \circ dS.$$

Jeśli $f(x,y,z)$ jest funkcją ciągłą na S, to

$$\iint_{S_{\Phi_1}} f\, dS = \iint_{S_{\Phi_2}} f\, dS,$$

tzn. całka niezorientowana nie zależy od wyboru parametryzacji.

Uwaga 3.26. *Nie pokazujemy tu przy jakich założeniach istnieje g klasy C^1 takie, że* $\det Dg \neq 0$.

Dowód. Rozważamy dwie parametryzacje powierzchni S

$$\Phi_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{oraz} \quad \Phi_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3, \quad \text{dla} \quad D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2.$$

Dla ustalonego punktu (x,y,z) powierzchni mamy

$$(x,y,z) = \Phi_1(u,v) = \Phi_2(u',v')$$

dla jedynych $(u,v) \in D_1$ oraz $(u',v') \in D_2$. Uzyskujemy w ten sposób odwzorowanie $g : D_1 \to D_2$

$$(u',v') = g(u,v).$$

Załóżmy, że g jest klasy C^1. Mamy

$$\Phi_1(u,v) = \Phi_2(u',v') = \Phi_2(g(u,v)).$$

Obliczamy macierz pochodnych obu stron.

$$D\Phi_1(u,v) = [T_u\ T_v] = D\Phi_2(\underbrace{g(u,v)}_{(u',v')})\, Dg(u,v) = [T_{u'}\ T_{v'}]\, Dg(u,v).$$

Lemat 3.27. *a, b, c, d są wektorami w $\mathbb{R}^3$ a M macierzą wymiaru 2×2. Jeśli $[c\ d] = [a\ b]\, M$, to $c \times d = \det M \cdot (a \times b)$.*

Dowód lematu. Niech $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Wtedy

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \gamma b & \beta a + \delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} c \times d = (\alpha a + \gamma b) \times (\beta a + \delta b) = \alpha\delta\, a \times b + \gamma\beta\, b \times a \\ = (\alpha\delta - \gamma\beta)\, a \times b = \det M \cdot (a \times b). \end{aligned}$$

□

Z lematu otrzymujemy

$$T_u \times T_v = \det Dg(u,v)\, T_{u'} \times T_{v'}, \quad \text{gdzie } (u',v') = g(u,v)$$

czyli

$$T_{u'} \times T_{v'} = (\det Dg(u,v))^{-1}\, T_u \times T_v.$$

Wykonujemy obliczenia stosując w trakcie podstawienie $(u',v') = g(u,v)$.

$$\begin{aligned} \iint_{S_{\Phi_2}} F \circ dS = \iint_{D_2} F(\Phi_2(u',v')) \circ (T_{u'} \times T_{v'})\, du'\, dv' \qquad \text{podstawienie} \\ = \iint_{D_1} F(\Phi_2(g(u,v)) \circ (T_{u'} \times T_{v'})\ |\det Dg(u,v)|\ du\, dv. \end{aligned}$$

Załóżmy, że $\det Dg(u,v) > 0$ dla $(u,v) \in D_1$. Wtedy w wyniku otrzymujemy

$$\iint_{D_1} F(\Phi_1(u,v)) \circ (T_u \times T_v)\, du\, dv = \iint_{S_{\Phi_1}} F \circ dS.$$

Jeśli $\det Dg(u,v) < 0$ dla $(u,v) \in D_1$, to w wyniku dostaniemy

$$-\iint_{S_{\Phi_1}} F \circ dS.$$

Dalej w wyniku tego samego podstawienia mamy

$$\begin{aligned} \iint_{S_{\Phi_2}} f\, dS = \iint_{D_2} f(\Phi_2(u',v')) \|T_{u'} \times T_{v'}\|\, du'\, dv' \\ = \iint_{D_1} f(\Phi_1(u,v)) \underbrace{\|T_{u'} \times T_{v'}\|\, |\det D_g(u,v)|}_{\|T_u \times T_v\|}\, du\, dv = \iint_{S_{\Phi_1}} f\, dS. \end{aligned}$$

□

3.5.1. *Interpretacja fizyczna całki powierzchniowej zorientowanej.* Zbadamy sumy Riemanna całki

$$\iint_S F \circ dS = \iint_D F(\Phi(u,v)) \circ (T_u \times T_v)\, du\, dv.$$

Niech R będzie małym prostokątem leżącym w D o bokach Δu i Δv równoległych do osi współrzędnych. Lewy dolny róg prostokąta R oznaczymy przez (u,v). Obraz $\Phi(R)$ prostokąta jest w przybliżeniu równoległobokiem o bokach $T_u\Delta u$ i $T_v\Delta v$. Rozważmy wielkość

$$F(\Phi(u,v)) \circ (T_u\Delta u \times T_v\Delta v).$$

Ze wzoru

$$\det(a,b,c) = a \circ (b \times c), \quad \text{dla } a,b,c \in \mathbb{R}^3.$$

wynika, że jest to plus minus objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $F(\Phi(u,v))$, $T_u\Delta u$ i $T_v\Delta v$. Zakładamy, że powierzchnia S jest zorientowana i parametryzacja Φ jest zgodna z orientacją. Jeśli wektor F jest skierowany w stronę dodatnią powierzchni, to otrzymujemy objętość równoległościanu, a jeśli w stronę ujemną, to otrzymamy minus objętość równoległościanu.

Niech F oznacza prędkość przepływu jakiegoś płynu w punkcie $(x,y,z) = \Phi(u,v)$. Wtedy F wskazuje kierunek przepływu a liczba

$$|F(\Phi(u,v)) \circ (T_u\Delta u \times T_v\Delta v)|$$

mierzy ilość płynu jaki przepłynął przez fragment powierzchni $\Phi(R)$ w jednostce czasu, ponieważ $A(\Phi(R)) \approx \|T_u\Delta u \times T_v\Delta v\|$. Zatem ilość płynu jaka przepłynie w jednostce czasu jest równa w przybliżeniu objętości równoległościanu rozpiętego przez $F(\Phi(u,v))$, $T_u\Delta u$ i $T_v\Delta v$. Znak zależy od tego, czy siła F jest skierowana na zewnątrz czy do wewnątrz powierzchni. Reasumując $F \circ (T_u \times T_v)\,\Delta u\,\Delta v$ jest prędkością przepływu na stronę zewnętrzną przez fragment powierzchni $\Phi(R)$. Podzielmy obszar D na małe prostokąty R_{ij}. Wtedy

$$\sum_{i,j=1}^{n} F \circ (T_u \times T_v)\Big|_{\substack{u=u_{i-1}\\ v=v_{j-1}}} \Delta u_i\, \Delta v_j$$

jest sumaryczną prędkością przepływu na zewnątrz powierzchni S. Ostatecznie całka

$$\iint_S F \circ dS$$

jest prędkością przepływu na zewnątrz powierzchni S.

Całka powierzchniowa służy do obliczania przepływu ciepła. Niech $T(x,y,z)$ oznacza temperaturę w punkcie (x,y,z). Rozważmy pole wektorowe

$$F = -k\nabla T = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

gdzie k jest stałym współczynnikiem dodatnim, zależnym od ośrodka. Wtedy całka $\iint_S F \circ dS$ opisuje tempo przepływu ciepła na zewnątrz powierzchni S.

Przykład 3.28. $T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$. *Załóżmy, że* $k = 1$, *czyli*

$$F = -\nabla T = -2(x,y,z).$$

Wtedy $F \circ n = -2$ *oraz*

$$\iint_S F \circ dS = \iint_S (F \circ n)\, dS = -8\pi.$$

Przypuśćmy, że S jest wykresem funkcji $z = g(x,y)$ dla $(x,y) \in D$. Stosujemy parametryzację

$$x := x,\ y := y,\ z = g(x,y).$$

Wtedy

$$T_x = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}\right), \quad T_y = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial y}\right), \quad T_x \times T_y = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right).$$

Dla pola wektorowego $F = (P,Q,R)$ w $\mathbb{R}^3$ otrzymujemy

$$\iint_S F \circ dS = \iint_D F \circ (T_x \times T_y)\, dx\, dy = \iint_D \left[-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R\right] dx\, dy, \tag{3.29}$$

przy czym funkcje P, Q i R są obliczone w $(x,y,g(x,y))$.