ANALIZA III - LISTA 9

1. Pokaż, że zachodzą następujące własności:

$$\begin{aligned}(S_1+S_2)\otimes T &= S_1\otimes T + S_2\otimes T\\ S\otimes(T_1+T_2) &= S\otimes T_1 + S\otimes T_2\\ (aS)\otimes T &= S\otimes(aT) = a(S\otimes T)\\ (S\otimes T)\otimes U &= S\otimes(T\otimes U)\end{aligned}$$

2. Niech $e_1, ..., e_d$ będzie bazą V, a $\varphi_1, ..., \varphi_d$ jej bazą dualną. Wtedy zbiór wszystkich 2 krotnych iloczynów tensorowych

$$\varphi_{i_1}\otimes\varphi_{i_2},\quad 1\le i_1\le i_2\le d,$$

jest bazą $\mathcal{T}^2(V)$. *Wsk. Policzyć najpierw* $\varphi_{i_1}\otimes\varphi_{i_2}(e_{j_1}, e_{j_2})$, *a potem* $T(v_1, v_2)$ *korzystając z dwuliniowości.*

3*. Niech $e_1, ..., e_d$ będzie bazą V, a $\varphi_1, ..., \varphi_d$ jej bazą dualną. Wtedy zbiór wszystkich k krotnych iloczynów tensorowych

$$\varphi_{i_1}\otimes...\otimes\varphi_{i_k},\quad 1\le i_1, ..., i_k\le d,$$

jest bazą $\mathcal{T}^k(V)$. *Wsk. Policzyć najpierw* $\varphi_{i_1}\otimes...\otimes\varphi_{i_k}(e_{j_1}, ..., e_{j_k})$

4. Jeśli $f : V \mapsto W$ jest odwzorowaniem liniowym, to odwzorowanie liniowe $f^* : \mathcal{T}^k(W) \mapsto \mathcal{T}^k(V)$ definiuje się jako

$$(f^*T)(v_1, ..., v_k) = T(f(v_1), ..., (v_k)).$$

Pokaż, że (f^*T) jest k-tensorem, jeśli takie jest T, f^* jest liniowe tzn.

$$f^*(aS+bT) = af^*S + bf^*T.$$

i

$$f^*(S\otimes T) = f^*S\otimes f^*T.$$

5*. Tensor ω nazywamy alternującym jeśli dla każdych i, j

$$\omega(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -\omega(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k).$$

Pokaż, że wtedy dla każdej permutacji σ

$$\omega(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma)\ \omega(v_1, ..., v_k)$$

oraz, że jeśli ω jest alternujący, to $\omega(v, v, v_3, ..., v_k) = 0$.

W poniższych zadaniach $\varphi_1, ..., \varphi_d$ jest bazą dualną do $e_1, ..., e_d$ ustalonej bazy V.

6. Przypomnijmy, że $\varphi_i \wedge \varphi_j = 2\mathrm{Alt}(\varphi_i \otimes \varphi_j)$. Pokaż, że

$$\varphi_i \wedge \varphi_j = -\varphi_j \wedge \varphi_i,$$
$$\varphi_i \wedge \varphi_i = 0$$
$$(\varphi_i \wedge \varphi_j)(v, w) = \varphi_i(v)\varphi_j(w) - \varphi_i(w)\varphi_j(v).$$

7. Pokaż, że $\varphi_i \wedge \varphi_j$, dla $1 \leq i < j \leq d$ są liniowo niezależne.

8*. Przypominijmy, że $\varphi_i \wedge \varphi_j \wedge \varphi_k = 3!\mathrm{Alt}(\varphi_i \otimes \varphi_j \otimes \varphi_k)$. Pokaż, że

$$\varphi_i \wedge \varphi_i \wedge \varphi_k = 0$$
$$\varphi_k \wedge \varphi_j \wedge \varphi_i = -\varphi_i \wedge \varphi_j \wedge \varphi_k.$$
$$\varphi_{\sigma(i)} \wedge \varphi_{\sigma(j)} \wedge \varphi_{\sigma(k)} = \mathrm{sgn}\sigma \ \varphi_i \wedge \varphi_j \wedge \varphi_k.$$

9*. Pokaż, że $\varphi_i \wedge \varphi_j \wedge \varphi_k$, dla $i < j < k$ są liniowo niezależne. Jaki jest wymiar $\Lambda^3(V)$, gdy $\dim V = 3$? Jaki jest wymiar $\Lambda^3(V)$, gdy $\dim V = 2$? *Wskazówka jak w zadaniu 2.*

10*. Przypomnijmy, że

$$\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k} = k!\mathrm{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{i_k})$$

Pokaż, że jeśli $i_j = i_p$ dla jakichś j, p to $\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k} = 0$,

$$\varphi_{\sigma(i_1)} \wedge \varphi_{\sigma(i_2)} \wedge ... \wedge \varphi_{\sigma(i_k)} = \mathrm{sgn}\sigma \varphi_{\sigma(i_1)} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k}.$$

11*. Załóżmy, że $i_1 < i_2 < ... < i_k$, oraz $j_1 < j_2 < ... < j_k$. Pokaż, że

$$\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k}(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad i_m = j_m \quad \text{dla każdego } m \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

oraz, że

$$\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k}, \quad i_1 < ... < i_k,$$

są niezależne. Jaka jest baza $\Omega^k(V)$ gdy $k = \dim V$. Pokaż, że $\Omega^k(V) = 0$, gdy $k > \dim V$.

12. Pokaż, że dla $\omega \in \Omega^k(V), \eta \in \Omega^j(V)$

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta,$$
$$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2,$$
$$a\omega \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta).$$

13. Pokaż, że dla $\omega \in \Omega^k(V), \eta \in \Omega^j(V)$

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$$

14*. Pokaż, że dla $\omega \in \Omega^k(V), \eta \in \Omega^j(V)$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kj} \eta \wedge \omega$$