ANALIZA III - LISTA 7

1*. Pokazać, że całka krzywoliniowa funkcji $f(x, y)$ wzdłuż drogi σ zadanej we współrzędnych biegunowych poprzez $r = r(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ jest równa

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Obliczyc długość krzywej $r = 1 + \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

2. Niech $f(x, y) = 2x - y$ i $\sigma(t) = (t^4, t^4)$, $0 \leq t \leq 1$. Obliczyć $\int_\sigma f\ ds$. Obliczyć długość krzywej σ. Obliczyć długość odcinka krzywej dla $0 \leq t \leq t_0$, gdzie $t_0 \leq 1$. To samo, gdy $\sigma(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$ i porównać.

3*. Znaleźć masę przewodu, który powstaje z przecięcia sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i płaszczyzny $x + y + z = 0$ jesli gęstość masy w pukcie (x, y, z) wynosi $\rho(x, y, z) = x^2$ gramów na jednostkę długości.

4. Obliczyć $\int_\sigma f\ ds$, gdzie $f(x, y, z) = z$ i $\sigma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $0 \leq t \leq t_0$.

5. Dla krzywej $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$ niech $s(t)$ oznacza długość odcinka krzywej odpowiadającego przedziałowi czasu $[a, t]$. Korzystając ze wzoru na długość krzywej pokazać, że

$$\frac{ds}{dt} = \|\sigma'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Jeśli założmy, że obiekt porusza się po krzywej tak, że w chwili t znajduje się w punkcie $\sigma(t)$, to powyższy wzór mówi, że prędkość w chwili t jest równa długości wektora stycznego do krzywej w punkcie $\sigma(t)$.

6. Obliczyć całki krzywolinowe (dwa dowolne punkty liczą się jako jedno zadanie).

(a) $\int_\sigma xdx + ydy + zdz,\ \sigma(t) = (t^2, 3t, 2t^3), -1 \leq t \leq 2,$

(b) $\int_\sigma xdy - ydx,\ \sigma(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi,$

(c) $\int_\sigma xdx + ydx,\ \sigma(t) = (\cos\pi t, \sin\pi t), 0 \leq t \leq 2,$

(d) $\int_\sigma yzdx + xzdy + xydz$, gdzie σ składa się z dwóch odcinków łączących punkt $(1, 0, 0)$ z $(0, 1, 0)$ i dalej z $(0, 0, 1)$.

(e) $\int_\sigma x^2dx - xydy + dz$, gdzie σ jest fragmentem paraboli $z = x^2$, $y = 0$ od $(-1, 0, 1)$ do $(1, 0, 1)$.

7. Pole sił F jest równe $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Obliczyć pracę wykonaną przy przesunieciu obiektu wzdłuż paraboli $y = x^2$, $z = 0$, od $x = -1$ do $x = 2$.

8. Załóżmy, że wektor F jest prostopadły do wektora stycznego $\sigma'(t)$ w punkcie $\sigma(t)$. Pokazac, że $\int_\sigma F \circ ds = 0$. Załóżmy, że wektor F jest równoległy do wektora stycznego $\sigma'(t)$ w punkcie $\sigma(t)$ tzn. $F(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$, gdzie $\lambda(t) > 0$. Pokazać, że $\int_\sigma F \circ ds = \int_\sigma \|F\| ds$.

9. Niech $F(t)$ oznacza jednostkowy wektor styczny do krzywej σ. Ile wynosi $\int_\sigma F \circ ds$?.

10. Niech $F(x, y, z) = (z^3 + 2xy, x^2, 3xz^2)$. Pokazać, że $\int_\sigma F \circ ds$ wokół obwodu kwadratu jednostkowego jest równa 0.

11. Obliczyć $\int_\sigma 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz$, gdzie σ jest krzywa zorientowaną łączącą $(1, 1, 1)$ z $(1, 2, 4)$.

12. Załóżmy, że $\nabla f(x, y, z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$ i $f(0, 0, 0) = 5$. Obliczyć $f(1, 1, 2)$.

13. Niech pole sił będzie określone wzorem $F(x, y, z) = -(x, y, z)/r^3$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Pokazać, że praca potrzebna do przesunięcia obiektu z (x_1, y_1, z_1) do (x_2, y_2, z_2) zalezy tylko od promieni $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ i $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

14. Niech $\sigma : [-a, a] \mapsto \mathbb{R}^3$ będzie krzywą. Niech $\gamma(t) = \sigma(-t)$. Pokaż, że $\int_\sigma F\ ds = \int_\gamma F\ ds$ i $\int_\sigma F \circ ds = -\int_\gamma F \circ ds$.

15*. Niech $\sigma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ i $\gamma : [c, d] \mapsto \mathbb{R}^3$ będą parametryzacjami krzywej takimi, że $\gamma = \sigma \circ \rho$, gdzie ρ jest monotoniczne i C^1. Jeśli $\sigma(a) = \gamma(c)$ i $\sigma(b) = \gamma(d)$ to $\rho'(s) \geq 0$ i

$$\int_\sigma f\, ds = \int_\gamma f\, ds, \quad \int_\sigma F \circ ds = \int_\gamma f \circ ds.$$

Jeśli $\sigma(a) = \gamma(d)$ i $\sigma(b) = \gamma(c)$ to $\rho'(s) \leq 0$ i

$$\int_\sigma f\, ds = \int_\gamma f\, ds, \quad \int_\sigma F \circ ds = -\int_\gamma f \circ ds.$$

16*. Niech D będzie obszarem, a C jego brzegiem. Niech $\sigma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ i $\gamma : [c, d] \mapsto \mathbb{R}^3$ będą parametryzacjami C takimi, że $\gamma = \sigma \circ \rho$, gdzie ρ jest C^1 i $\rho' > 0$. Niech $\sigma(t) + \varepsilon n_\sigma(t) \notin D$ dla $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Wtedy $\gamma(t) + \eta n_\gamma(t) \notin D$ dla $0 < \eta \leq \eta_0$. $n_\sigma = (\sigma_2'(t), -\sigma_1'(t)), n_\gamma = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$.

17. Korzystając ze wzoru Greena obliczyć podane całki, przy założeniu, że krzywe sa zorientowane dodatnio (dwa podpunkty liczą sie jako całe zadanie).
a) $\int_\sigma ydx - xdy$, gdzie σjest brzegiem kwadratu $[-1, 1] \times [-1, 1]$.
b) $\int_\sigma (y^2 + x^3)dx + x^4dy$, gdzie σ jest brzegiem kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$.
c) $\int_\sigma xy^2dy - x^2ydx$, gdzie σ jest okręgiem $x^2 + y^2 = a^2$.

18*. Korzystając ze wzoru Greena obliczyć podane całki, przy założeniu, że parametryzacja brzegu σ jest zorientowana dodatnio. Można na początek założyć, że krzywa jest okręgiem.

a) $\int_\sigma \cos <(v,n)\ ds$, gdzie $n = \frac{n_\sigma}{\|n_\sigma\|}$ jest jednostkowym zewnętrznym wektorem normalnym do krzywej, v dowolnym ustalonym wektorem, a $\cos <(v,n)$ jest cosinusem kąta między nimi.
b) $\int_\sigma (x,y) \circ n\ ds$.
$\circ$ oznacza jak zwykle iloczyn skalarny, $n_\sigma = (\sigma_2'(t), -\sigma_1'(t))$.

19. Znaleźć pole elipsy korzystając ze wzoru $A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$.

20. Znaleźć pole obszaru ograniczonego przez jeden łuk cykloidy $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$, $a > 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$ i oś x.

21*. Pokaż, że koło jednostkowe jest obszarem elementarnym. Znajdź parametryzacje ϕ_1, ϕ_2, ψ_1, ψ_2 i pokaż, ze są one równoważne ze standardową parametryzacją okręgu.

22*. Niech D będzie obszarem, w którym zachodzi twierdzenie Greena. Załóżmy, że funkcja $u(x,y)$ jest harmoniczna, tzn. $\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ na D. Pokazać, że
$$\int_{\partial D} \nabla u \circ n\ ds = \int_{\partial D} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = 0,$$
gdzie n jest jednostkowym zewnętrznym wektorem normalnym do krzywej, patrz def. w zadaniu 18.