mieszą się w kuli

Zad. 6

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$
$$\shortparallel$$
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 16$$

Pokażemy, że rozw. tego równania zawierają się w kuli o środku $(1,-1,2)$ i promieniu 5.

To jest w zasadzie oczywiste, gdyż to równanie jest równaniem sfery o promieniu 4 o środku w $(1,-1,2)$.

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 - 4 \Rightarrow F \text{ jest rozwikływalna}$$

dla $z \neq 2$.

Policzmy gradient $z = g(x, y)$:

$$\nabla g(x_0, y_0) = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}, -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))} \right)$$

$$= \left(-\frac{2x_0 - 2}{2z_0 - 4}, -\frac{2y_0 + 2}{2z_0 - 4} \right)$$

$\nabla g(x_0, y_0) = 0 \iff x_0 = 1$ oraz $y_0 = -1$.

Wówczas równanie

$$(z-2)^2 - 16 = 0$$

ma rozw. dla $z = -2$ oraz $z = 6$,

a zatem $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ dla tych punktów

$\frac{\partial}{\partial z} \neq 0$ dla tych punktów

Hesjan funkcji g:

$$H_g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial y_0} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y_0 \partial x_0} & \frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\cancel{2}1 + \cancel{1}\frac{(2x-2)^2}{(2z-4)^2}}{4(\cancel{z}-\cancel{2})^3} & -\frac{2(2x-2)(2y+2)}{(2z-4)^3} \\ -\frac{2(2x-2)(2y+2)}{(2z-4)^3} & -\frac{\cancel{2}1 + 1\frac{(2y+2)^2}{(2z-4)^2}}{4(z-2)^3} \end{pmatrix}$$

~~w punk~~ w punktach $x=1$, $y=-1$, $z \in \{-2, 6\}$

~~$H_g($~~ Hesjan wygląda odpowiednio $\begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$

więc min jest dla $z=-2$, max dla $z=6$