[redacted]

Wykład 9

Def. 9.3. $a, b, c \in R$ ← przemienny.

1. a jest <u>odwracalny</u> [jednostka], gdy $\exists\, b \in R \;\; ab = 1$.

2. $R^* = \{a \in R : a \text{ odwracalny}\}$

3. $a \mid b \iff (\exists\, c \in R)\; a \cdot c = b$

   dzieli

   - zwrotna, tranzytywna [praporządek]

4. $a \sim b \iff a \mid b$ i $b \mid a$

   stowarzyszone

   - relacja równoważności

5. a : dzielnik zera, gdy

   $a \neq 0$ i $(\exists\, b \neq 0)\; a \cdot b = 0$

Fakt 9.4. $(R^*, \cdot)$: grupa (jednostek, elementów odwracalnych)

<u>Przykład</u>

- w $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$: $2 \cdot_6 3 = 0$, 2, 3 dzielniki zera
- w $R_1 \times R_2$: $\langle 0, 1\rangle \cdot \langle 1, 0\rangle = \langle 0, 0\rangle$

[redacted]

Niech $f: R \longrightarrow R_1$ homomorfizm pierścieni.

$\mathrm{Im} f \subseteq R_1$; $I := \mathrm{Ker} f = f^{-1}[\{0\}] \subseteq R$
podpierścień

własności:

$$\left.\begin{array}{l} (a)\ a, b \in I \Rightarrow a+b \in I \\ (b)\ a \in R, b \in I \Rightarrow a \cdot b \in I \end{array}\right\} \begin{array}{l} I + I \subseteq I \\ R \cdot I \subseteq I \end{array}$$

Def. 9.5. Niech $I \subseteq R$, $I \neq \emptyset$.

1. I: ideał pierścienia R, gdy I spełnia (a), (b) powyżej.
   $I \lhd R$
2. $I \lhd R$ – trywialny, gdy $I = \{0\}$ (zerowy)
   – właściwy, gdy $I \neq R$
   – niewłaściwy, gdy $I = R$.

Uwaga. W szczególności $(I, +) < (R, +)$

D-d $a \in I \Rightarrow -a = (-1) \cdot a \in I$

$0 = a + (-a) \in I$.

Niech $I \triangleleft R$.

Pierścień ilorazowy:

Niech R/I : zbiór warstw podgrupy $(I,+)$ w $(R,+)$

$$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$$

$$(a+I)\cdot(b+I) = ab + \underbrace{aI+Ib+II}_{\subseteq I} \subseteq$$

$$\subseteq ab+I$$

$\oplus$ i $\odot$ w R/I:

$$(a+I)\oplus(b+I)=(a+b)+I$$

$$(a+I)\odot(b+I) = ab+I$$

(jedyna warstwa I zawierająca $(a+I)\cdot(b+I)$)

Uwaga (definicja) 9.6.

1. $(R/I, \oplus, \odot)$ pierścień (ilorazowy R przez I)
2. $j: R \longrightarrow R/I$: homomorfizm ilorazowy (epi)
3. $\operatorname{Ker} j = I$.

[redacted]

Zasadnicze tw. o homomorfizmie pierścieni 9.7

Jeśli $f: R \longrightarrow R_1$: epimorfizm pierścieni i $I = \operatorname{Ker} f$, to $\exists!\ \bar{f} : R/I \xrightarrow{\cong} R_1$, $f = \bar{f} \circ j$

tzn.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "j"'] & R_1 \\ & R/I \arrow[u, dashed, "\cong", "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

$\#$

D-d jak dla grup. $\bar{f}(a + I) = f(a)$

- jedyność
- to działa

} jak dla grup.

Tw. 9.8 (o faktoryzacji)

Jeśli $f: R \longrightarrow R_1$ homomorfizm pierścieni, $I \lhd R$ i $I \subseteq \operatorname{Ker} f$, to $\exists!\ \bar{f} : R/I \underset{\text{homo}}{\longrightarrow} R_1$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "j"'] & R_1 \\ & R/I \arrow[u, dashed, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

$\#$

Przykłady. 1. $a \in R \rightsquigarrow (a) = Ra = \{b \in R : a \mid b\}$ ideał główny generowany przez a.

Uwaga 9.9 $a \sim b \iff (a) = (b)$ (dw.)

Uwaga 9.10.

Zał., że $\{I_t : t \in T\}$ – rodzina ideałów pierścienia R, $T \neq \emptyset$.

1. $\bigcap_{t\in T} I_t \lhd R$.

2. Jeśli $\{I_t : t\in T\}$ liniowo uporządkowany przez $\subseteq$, to $\bigcup_{t\in T} I_t \lhd R$

3. Jeśli ponadto $\forall t\ I_t \neq R$, to $\bigcup_{t\in T} I_t \neq R$

[bo: dla $I \lhd R$, $I \neq R \underset{\text{ćw.}}{\Longleftrightarrow} 1 \notin I$]

Przykład 2. $(n) = n\mathbb{Z} \lhd (\mathbb{Z},+,\cdot)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Wn./Def. 9.11. Niech $A \subseteq R$. Istnieje najmniejszy ideał w R zawierający A (ozn. (A)): ideał generowany przez A.

Gdy $A=\{a_1,\dots,a_n\}$, $(A) \overset{\text{ozn}}{=} (a_1,\dots,a_n)$

Fakt 9.12. ($A\neq\emptyset$)

1. $(A) = \{b_1a_1+\dots+b_na_n : b_i\in R, a_i\in A, n\in\mathbb{N}\}$,

2. $(a_1,\dots,a_n) = Ra_1+\dots+Ra_n$.

[redacted]

Def. 9.13 Niech $I \lhd R$.

I : skończenie generowany, gdy

$I = (a_1, \dots, a_n)$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in R$ i $n \in \mathbb{N}$.

Def. 9.14. R jest pierścieniem ideałów głównych, gdy każdy ideał w R jest główny

Przykłady.

1. $\mathbb{Z}$ jest pierścieniem ideałów głównych.
   (bo: $I \lhd \mathbb{Z} \Rightarrow (I,+) < (\mathbb{Z},+) \Rightarrow I = n\mathbb{Z} = (n)$ dla pewnego $n \geq 0$)
2. K : ciało $\Rightarrow K[X]$ pierścień ideałów głównych

D-d. Niech $I \lhd K[X]$

Zał, że $I \neq \{0\} = (0)$

Niech $0 \neq f \in I$ t. że $\deg f$: minimalny.

• $I = (f)$. $\supseteq$: jasne

$\subseteq$: Niech $g \in I$

$$g = f \cdot q + r, \quad \deg r < \deg f$$

dzielenie wielomianów z resztą

$$g \in I, \quad f \cdot q \in I \Rightarrow r \in I \xRightarrow{\text{wybór } f} r = 0 \Rightarrow f \mid g \Rightarrow g \in (f).$$

Przykład $(X_1, X_2) \lhd K[X_1, X_2]$ niegłówny (ćw.)

Def. 9.15.

R jest noetherowski, gdy $\forall I \lhd R$ I: skończenie generowany.

Emma Noether, 1882–1935.

Tw. 9.16. ⇔

1. R noetherowski.
2. Każdy wstępujący ciąg ideałów w R $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ jest od pewnego miejsca stały (tzn. $I_n = I_{n+1} = \ldots$)
3. Każda niepusta rodzina $\mathcal{J}$ ideałów w R ma element maksymalny.

D-d (1) ⇒ (2). Niech $I = \bigcup_n I_n$ $I \lhd R$.

$I = (a_1, \ldots, a_k)$ (bo R: noetherowski)

Niech n t. że $a_1, \ldots, a_k \in I_n$.

Wtedy $I = (a_1, \ldots, a_k) \subseteq I_n \subseteq I$, więc $\Rightarrow$

$I = I_n = I_{n+1} = \ldots$

(2) $\Rightarrow$ (3).

Jeśli nie, to $I_0 \in \mathcal{J}$ jakikolwiek — niemaksymalny

$\subsetneq$

$I_1 \in \mathcal{J}$ — 〃 — 〃 —

$\subsetneq$

$I_2 \in \mathcal{J}$ — 〃 — 〃 —

i.t.d. ↯ z (2).

(3) $\Rightarrow$ (1). Niech $I \lhd R$

Niech $\mathcal{J} = \{ J \lhd R : J \subseteq I$ i J: skończ. generowany$\}$

z (3): istnieje $J \in \mathcal{J}$ maksymalny

• $J = I$, bo: $\subseteq$: jasne

$\supseteq$: jeśli nie, to niech $a \in I \setminus J$.

Wtedy $(J \cup \{a\}) \in \mathcal{J}$

$\supsetneq$ ↯ z maks. maksymalności J.

J

Tw. 10.1 (Hilberta o bazie)

R: noetherowski $\Rightarrow$ $R[X]$ noetherowski.

D-d. Niech $I \lhd R[X]$.

Dla $n \geq 0$ niech $(n \in \mathbb{N})$

$$I_n = \{ a \in R : \exists\, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in R \ (aX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0) \in I \}$$

[redacted]

- $I_0 = I \cap R$.
- $I_n \lhd R$ oraz $\underbrace{I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots}_{\text{bo:}}$

$I_n \subseteq I_{n+1}$:

$$(aX^n + \dots) \in I \Rightarrow X \cdot (aX^n + \dots) = (a \cdot X^{n+1} + \dots) \in I.$$

Niech m t. że $I_m = I_{m+1} = I_{m+2} = \dots$

R: noetherowski $\Rightarrow I_0, \dots, I_m$: skończenie generowane.

$$I_0 = (a_{0,1}, \dots, a_{0,k_0}), \dots, I_m = (a_{m,1}, \dots, a_{m,k_m})$$

$$a_{i,j} \rightsquigarrow f_{ij} \in I$$

$$f_{ij} = (a_{ij}X^i + \dots), \quad f_{0j} = a_{0j}$$

Niech $J = (f_{ij} : 0 \le i \le m,\ 1 \le j \le k_i) \lhd R[X]$.

- $I = J$

$\supseteq$: jasne

$\subseteq$: Niech $f \in I$. Pdk. że $f \in J$.

Indukcja względem $\deg f$.

[redacted]

1. $\deg f = 0 \Rightarrow f \in R \Rightarrow f \in I_0 \subseteq J.$

2. krok indukcyjny:

Zał. że $\deg f = k > 0$ i $(\forall g \in I)(\deg g < k \Rightarrow g \in J)$.

$$f = (aX^k + \dots\ ),\ a \in I_k.$$

Przypadek (a). $k \leq m$.

Wtedy $I_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k k_k}) \Rightarrow a = \sum_t \overset{R}{\overset{\downarrow}{b_t}} a_{k,t}$

$$\sum_t b_t f_{k,t} = (aX^k + \dots),$$ więc

$$\deg(\underbrace{f - \sum_t b_t f_{kt}}_{\in I \underset{\text{zał. ind.}}{\Longrightarrow} \in J}) < k$$

stąd $$f = (\underbrace{f - \sum_t b_t f_{kt}}_{\in J}) + \underbrace{\sum_t b_t f_{kt}}_{\in J} \in J.$$

[redacted]

Przypadek (b) $k > m$.

$$a \in I_k = I_m = (a_{m,1},\dots,a_{m,k_m})$$

$$\Downarrow \quad R$$

$$a = \sum_t b_t a_{mt}$$

$$X^{k-m}\cdot\Big(\sum_t b_{mt} f_{mt}\Big) = (aX^k + \dots)$$

dalej jak w (a).

Wn. 10.2. Jeśli K: ciało, to pierścień $K[X_1,\dots,X_n]$ jest noetherowski.

<u>D-d</u>. Indukcja względem n.

$$K[X_1,\dots,X_{n+1}] = (K[X_1,\dots,X_n])[X_{n+1}]$$