# Wykład 9

**Def. 9.3.** $a, b, c \in R \leftarrow$ przemienny.

1. $a$ jest <u>odwracalny</u>, gdy $\exists\, b \in R \;\; ab = 1$.
   [jednostka]

2. $R^* = \{a \in R : a \text{ odwracalny}\}$

3. $a \mid b \iff (\exists\, c \in R)\; a \cdot c = b$
   dzieli
   - zwrotna, tranzytywna
   [preporządek]

4. $a \sim b \iff a \mid b \text{ i } b \mid a$
   $\uparrow$ stowarzyszone
   - relacja równoważności

5. $a$ : dzielnik zera, gdy
   $a \neq 0 \text{ i } (\exists\, b \neq 0)\; a \cdot b = 0$

**Fakt 9.4.** $(R^*, \cdot)$ : grupa (jednostek, elementów odwracalnych)

<u>Przykład</u>

- w $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ : $2 \cdot_6 3 = 0$, $2, 3$ dzielniki zera
- w $R_1 \times R_2$ : $\langle 0, 1\rangle \cdot \langle 1, 0\rangle = \langle 0, 0\rangle$

Niech $f: R \longrightarrow R_1$ homomorfizm pierścieni.

$\operatorname{Im} f \subseteq R_1$ podpierścień ; $I := \operatorname{Ker} f = f^{-1}[\{0\}] \subseteq R$

własności:

(a) $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$ $\quad I + I \subseteq I$

(b) $a \in R, b \in I \Rightarrow a \cdot b \in I$ $\quad R \cdot I \subseteq I$

Def. 9.5. Niech $I \subseteq R$, $I \neq \emptyset$.

1. $I$: ideał pierścienia $R$, gdy $I$ spełnia (a), (b) powyżej. $I \triangleleft R$

2. $I \triangleleft R$
   - trywialny, gdy $I = \{0\}$ (zerowy)
   - właściwy, gdy $I \neq R$
   - niewłaściwy, gdy $I = R$.

Uwaga. W szczególności $(I, +) < (R, +)$

D-d $a \in I \Rightarrow -a = (-1) \cdot a \in I$

$0 = a + (-a) \in I$.

[redacted]



Niech $I \triangleleft R$.

Pierścień ilorazowy:

Niech $R/I$ : zbiór warstw podgrupy

$$(I,+) \text{ w } (R,+)$$

$$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$$

$$(a+I)\cdot(b+I) = ab + \underbrace{aI+Ib+II}_{\subseteq I} \subseteq$$

$$\subseteq ab+I$$

$\oplus$ i $\odot$ w $R/I$:

$$(a+I)\oplus(b+I)=(a+b)+I$$

$$(a+I)\odot(b+I)=ab+I$$

(jedyna warstwa $I$ zawierająca $(a+I)\cdot(b+I)$)

Uwaga (definicja) 9.6.

1. $(R/I, \oplus, \odot)$ pierścień (ilorazowy $R$ przez $I$)
2. $j: R \longrightarrow R/I$ : homomorfizm ilorazowy (epi)
3. $\operatorname{Ker} j = I$.

Zasadnicze tw. o homomorfizmie pierścieni 9.7

Jeśli $f: R \to R_1$ : epimorfizm pierścieni i $I = \operatorname{Ker} f$, to $\exists!\ \bar{f} : R/I \xrightarrow{\cong} R_1$, $f = \bar{f} \circ j$

tzn.
$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "j"'] & R_1 \arrow[d, phantom, "\#"] \\ & R/I \arrow[u, dashed, "\cong", "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

D-d jak dla grup. $\bar{f}(a+I) = f(a)$

- jedyność
- łodziała

} jak dla grup.

Tw. 9.8 (o faktoryzacji)

Jeśli $f: R \to R_1$ homomorfizm pierścieni, $I \triangleleft R$ i $I \subseteq \operatorname{ker} f$, to $\exists!\ \bar{f}: R/I \underset{\text{homo}}{\longrightarrow} R_1$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "j"'] & R_1 \arrow[d, phantom, "\#"] \\ & R/I \arrow[u, dashed, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

Przykłady. 1. $a \in R \rightsquigarrow (a) = Ra = \{b \in R : a \mid b\}$
ideał główny generowany przez $a$.

Uwaga 9.9. $a \sim b \iff (a) = (b)$ (dw.)

Uwaga 9.10.

Zał, że $\{I_t : t \in T\}$ : rodzina ideałów pierścienia $R$, $T \neq \emptyset$.

1. $\bigcap_{t\in T} I_t \lhd R$.

2. Jeśli $\{I_t : t \in T\}$ liniowo uporządkowany przez $\subseteq$, to $\bigcup_{t\in T} I_t \lhd R$

3. Jeśli ponadto $\forall t \ I_t \neq R$, to $\bigcup_{t\in T} I_t \neq R$

[bo: dla $I \lhd R$, $I \neq R \underset{\text{ćw.}}{\Longleftrightarrow} 1 \notin I$]

Przykład 2. $(n) = n\mathbb{Z} \lhd (\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Wn./Def. 9.11. Niech $A \subseteq R$. Istnieje najmniejszy ideał w $R$ zawierający $A$ (ozn. $(A)$): ideał generowany przez $A$.

Gdy $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $(A) \overset{\text{ozn}}{=} (a_1, \dots, a_n)$.

Fakt 9.12. ($A \neq \emptyset$)

1. $(A) = \{b_1 a_1 + \dots + b_n a_n : b_i \in R, a_i \in A, n \in \mathbb{N}\}$,

2. $(a_1, \dots, a_n) = Ra_1 + \dots + Ra_n$.

Def. 9.13 Niech $I \triangleleft R$.

$I$ : skończenie generowany, gdy

$I = (a_1, \dots, a_n)$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in R$ i $n \in \mathbb{N}$.

Def. 9.14. $R$ jest pierścieniem ideałów głównych, gdy każdy ideał w $R$ jest główny.

Przykłady.

1. $\mathbb{Z}$ jest pierścieniem ideałów głównych.

( bo: $I \triangleleft \mathbb{Z} \Rightarrow (I,+) < (\mathbb{Z},+) \Rightarrow I = n\mathbb{Z} = (n)$ dla pewnego $n \geq 0$ )

2. $K$ : ciało $\Rightarrow K[X]$ pierścień ideałów głównych

D-d. Niech $I \triangleleft K[X]$

Zał., że $I \neq \{0\} = (0)$

Niech $0 \neq f \in I$ t. że $\deg f$ : minimalny.

• $I = (f)$. $\supseteq$ : jasne

$\subseteq$ : Niech $g \in I$

$$g = \underbrace{f \cdot q}_{\in I} + r, \quad \deg r < \deg f$$

dzielenie wielomianów z resztą

$$\underset{I}{g \in},\ \underset{I}{fq \in} \Longrightarrow r \in I \xRightarrow{\text{wybór } f} r = 0 \Rightarrow f \mid g \Rightarrow g \in (f).$$

<u>Przykład</u> $(X_1, X_2) \lhd K[X_1, X_2]$
niegłówny (ćw.)

Def. 9.15.
R jest <u>noetherowski</u>, gdy $\forall I \lhd R$ $I$: skończenie generowany.

Emma Noether, 1882–1935.

TW. 9.16.

1. R noetherowski.
2. Każdy wstępujący ciąg ideałów w R $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ jest od pewnego miejsca stały ($\exists n$. $I_n = I_{n+1} = \dots$)
3. Każda niepusta rodzina $\mathcal{J}$ ideałów w R ma element maksymalny.

<u>D-d</u> (1) $\Rightarrow$ (2). Niech $I = \bigcup_n I_n$. $I \lhd R$.

$I = (a_1, \dots, a_k)$ (bo R: noetherowski)

Niech $n$ t.że $a_1, \dots, a_k \in I_n$.

Wtedy $I = (a_1, \dots, a_k) \subseteq I_n \subseteq I$, więc

$I = I_n = I_{n+1} = \dots$

$(2) \Rightarrow (3)$.

Jeśli nie, to $I_0 \in \mathcal{J}$ jakikolwiek — niemaksymalny

$$\begin{array}{lll} I_0 \in \mathcal{J} & & \\ \cap\!\!\!\!\neq & & \\ I_1 \in \mathcal{J} & \text{—}/\!/\text{—} & \text{—}/\!/\text{—} \\ \cap\!\!\!\!\neq & & \\ I_2 \in \mathcal{J} & \text{—}/\!/\text{—} & \text{—}/\!/\text{—} \end{array}$$

itd. ↯ z (2).

$(3) \Rightarrow (1)$. Niech $I \lhd R$

Niech $\mathcal{J} = \{ J \lhd R : J \subseteq I$ i $J$: skończ. generowany$\}$

z (3): istnieje $J \in \mathcal{J}$ maksymalny

· $J = I$, bo: $\subseteq$ : jasne

$\supseteq$: jeśli nie, to niech $a \in I \setminus J$.

Wtedy $(J \cup \{a\}) \in \mathcal{J}$

$$\begin{array}{c} (J \cup \{a\}) \\ \supsetneq \\ J \end{array}$$

↯ z maksymalnością $J$.

Tw. 10.1 (Hilberta o bazie)

$R$: noetherowski $\Rightarrow R[X]$ noetherowski.

D-d. Niech $I \lhd R[X]$.

Dla $n \geq 0$ niech

$$I_n = \{ a \in R : \exists\, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (aX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0) \in I \}$$

- $I_0 = I \cap R$.
- $I_n \lhd R$ oraz $\underbrace{I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots}_{\text{bo:}}$

$I_n \subseteq I_{n+1}$:

$$(aX^n + \dots) \in I \Rightarrow X \cdot (aX^n + \dots) = (a \cdot X^{n+1} + \dots) \in I.$$

Niech $m$ t. że $I_m = I_{m+1} = I_{m+2} = \dots$

R: $\overset{\Rightarrow}{\text{noetherowski}}$ $\Rightarrow I_0, \dots, I_m$: skończenie generowane.

$$I_0 = (a_{0,1}, \dots, a_{0,k_0}), \dots, I_m = (a_{m,1}, \dots, a_{m,k_m})$$

$$a_{i,j} \rightsquigarrow \underset{(a_{ij}X^i + \dots)}{\underset{\parallel}{f_{ij}}} \in I, \quad f_{0j} = a_{0j}$$

Niech $J = (f_{ij} : 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i) \lhd R[X]$.

- $I = J$.

$\supseteq$: jasne

$\subseteq$: Niech $\underset{\neq}{\overset{0}{}} f \in I$. Pdk. że $f \in J$.

Indukcja względem $\deg f$.

1. $\deg f = 0 \Rightarrow f \in R \Rightarrow f \in I_0 \subseteq J$.

2. krok indukcyjny:

Zał. że $\deg f = k > 0$ i $(\forall g \in I)(\deg g < k \Rightarrow g \in J)$.

$f = (aX^k + \dots)$, $a \in I_k$.

Przypadek (a). $k \leq m$.

Wtedy $I_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k k_k}) \Rightarrow a = \sum_t \underset{\in R}{b_t} a_{k,t}$

$$\sum_t b_t f_{k,t} = (aX^k + \dots), \text{ więc}$$

$$\deg\Big(\underbrace{f - \sum_t b_t f_{kt}}_{\in I}\Big) < k \underset{\text{zał. ind.}}{\Longrightarrow} \in J$$

stąd $f = \underbrace{\Big(f - \sum_t b_t f_{kt}\Big)}_{\in J} + \underbrace{\sum_t b_t f_{kt}}_{\in J} \in J$.

Przypadek (b) $k > m$.

$$a \in I_k = I_m = (a_{m,1}, \dots, a_{m,k_m})$$

$$\Downarrow$$

$$a = \sum_t \overset{\overset{R}{\Downarrow}}{b_t}\, a_{mt}$$

$$X^{k-m} \cdot \left( \sum_t b_{mt} f_{mt} \right) = \left( aX^k + \dots \right)$$

dalej jak w (a).

Wn. 10.2. Jeśli $K$: ciało, to pierścień $K[X_1, \dots, X_n]$ jest noetherowski.

<u>D-d</u>. Indukcja względem $n$.

$$K[X_1, \dots, X_{n+1}] = (K[X_1, \dots, X_n])[X_{n+1}].$$