Wykład 8.

<u>D-d</u> tw. 8.6. (szkic)

$W(X)$ = zbiór wyrażeń algebraicznych ze zmiennymi z X (i stałymi), w języku rozmaitości R (termy)

$\sim$: relacja równoważności na $W(X)$;

$\sigma_1 \sim \sigma_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ "$\sigma_1 = \sigma_2$" wynika z aksjomatów rozmaitości R.

- $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X \Rightarrow$ "$x_1 \not\sim x_2$

(tu używamy założenia, że w R jest algebra o > 1 elemencie)

- $A = W(X)/_\sim$ z naturalnymi działaniami

algebra wolna

[$\sim$ jest kongruencją, tzn. jest respektowana przez działania ~~rozma~~ algebr w R]

• $X \ni x$ utożsamiany z $[x]_\sim$ klasa abstrakcji.

W tym sensie $X \subseteq A$.

Przykłady

• Każda przestrzeń liniowa V nad $\mathbb{R}$ jest wolna (baza — wolny zbiór generatorów) w rozmaitości przestrzeni liniowych nad $\mathbb{R}$.

• algebry Boole'a "=" ciała zbiorów
- wolna algebra Boole'a nad X: "zbiór formuł ~~zdań~~ zdaniowych o zmiennych z X", z dokładnością do logicznej równoważności.
- wolna grupa rozwiązalna stopnia ≤ 5, o wolnym zbiorze generatorów X

itd

Pierścienie.

Najważniejszy (motywujący) przykład:

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ring, kolbo

Def. 9.1. 1. $(R, +, \cdot)$ pierścień, gdy:

"dodawanie" "mnożenie"

pierścienia R

(a) $(R, +)$: grupa abelowa

(tzw. grupa addytywna pierścienia R)

el. neutralny: 0: zero pierścienia R)

(b) $\cdot$: łączne i obustronnie rozdzielne

~~a(b+~~ względem +;

$a(b+c) = ab + ac$ lewostronnie rozdzielne.

$(b+c)a = ba + ca$ prawostronnie

2. R: pierścień przemienny, gdy $\cdot$ przemienne

3. R: pierścień z jednością, gdy istnieje

$1 \in R$: element neutralny dla $\cdot$,

($\Rightarrow$ jedyny)

(jedność pierścienia)

4. $R' \subseteq R$: podpierścień [z jednością] pierścienia R [z jednością], gdy R' : pierścień względem działań z R [i $1_{R'} = 1_R$].

U nas zasadniczo : R : pierścień przemienny z jednością $1 \neq 0$

Przykłady.

0. $R = \{0\}$ zerowy : pierścień z jednością, tzn. $1_R = 0_R$.

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$, $n \geq 1$.

Niech R : pierścień przemienny z 1 ;

. $R[[X]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i : a_i \in R\}$ pierścień formalnych szeregów potęgowych zmiennej X, nad R, Działania:

$$\sum a_i X^i + \sum b_i X^i = \sum (a_i + b_i) X^i$$

$$\left(\sum a_i X^i\right) \cdot \left(\sum b_i X^i\right) = \sum c_i X^i, \text{ gdzie}$$

$$c_i = \sum_{n+k=i} a_n b_k .$$

3. $R[X] = \{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[[X]] : a_i = 0$ dla p.w. $i \in \mathbb{N} \}$

pierścień wielomianów zmiennej X nad R.

- podpierścień $\subseteq R[[X]]$.

$R[X] \ni W(X) = \sum a_i X^i$

$\deg W = \max\{ n : a_n \neq 0 \}$, gdy $W \neq 0$

$\deg 0 = -\infty$ stopień wielomianu.

- $\deg (W \cdot V) \leq \deg W + \deg V$ (często $=$)

- ~~$\deg W + \deg V$~~ $\leq$

$\deg (W + V) \leq \max(\deg W, \deg V)$.

$R \subseteq R[X]$: podpierścień.

$\overset{\in}{\check{a}} = a \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + 0 \cdot X^2 + \ldots$

wielomian stopnia ≤ 0.

Ogólniej: $R[X_1, X_2] = R[X_1][X_2]$

$[[X_1, X_2]] \quad [[X_1]][[X_2]]$

$R[X_1, \ldots, X_n]$

$[[\quad]]$ itd.

4. R^X : pierścień funkcji $X \longrightarrow R$

$\overset{\in}{f}, g \rightsquigarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Produkt pierścieni:

$R_1 \times R_2$ działania po osiach

(jak w produkcie grup)

ogólniej: $\prod_{i \in I} R_i$,

np. $R^X = \prod_{x \in X} R_x$, $R_x = R$.

AII.8 (7

5. $C(X) = \{\text{funkcje ciągłe} ; X \to \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^X$

$\uparrow$ przestrzeń topologiczna (np: metryczna) — podpierścień.

6. $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$; pierścień macierzy $n\times n$, gdy $n \geq 2$; zazwyczaj nieprzemienny.

7. $(\mathcal{P}(X), \underset{\uparrow}{\Delta}, \cap)$ "dodawanie" "mnożenie".

ogólniej: $\mathcal{C} \subseteq P(X)$

ciało zbiorów: $\cdot\ \overset{\mathbb{0}}{\overset{\shortparallel}{\emptyset}}, \overset{\mathbb{1}}{\overset{\shortparallel}{X}} \in \mathcal{C}$

$\cdot\ \mathcal{C}$ zamknięte na $\cup, \cap, {}'$

$\rightsquigarrow (\mathcal{C}, \Delta, \cap)$

ogólniej:

$(\mathbb{A}, \vee, \wedge, \mathbb{0}, \mathbb{1})$

algebra Boole'a

$\rightsquigarrow (\mathbb{A}, \Delta, \wedge)$

Ogólniej: R; pierścień Boolowski, gdy:

$\cdot$ przemienny, z 1, $a^2 = a$ dla $a \in R$.

8. G : grupa abelowa.

End(G) : pierścień endomorfizmów grupy G.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(g(x)), \quad x \in G$$

Uwaga 9.2 (R : przemienny z 1)

(1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

(2) $(-a) \cdot b = -(ab) = a(-b)$

(3) $(-a)(-b) = ab$

(4) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $n > 0$