Grupy wolne

Zał, że F: grupa, $X \subseteq F$.

Def. 7.1 (1) X jest zbiorem wolnych generatorów grupy F, gdy

$$\forall G\ \forall f: X \longrightarrow G\ \exists!\, f': F \longrightarrow G \text{ homomorfizm},\ f \subseteq f'$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\subseteq"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\#"] & G \\ & F \arrow[u, dashed, "f'"'] \end{tikzcd}$$

(2) F jest grupą wolną, gdy ma wolny zbiór generatorów.

(3) (Ranga grupy wolnej X) $= |X|$, gdzie
$X \subseteq F$: zbiór wolnych generatorów.
(poprawnie określone, zad. później)

Uwaga 7.2. Jeśli X : zbiór wolnych generatorów grupy F, to $\langle X \rangle = F$.

D-d był tydzień temu.

Tw. 7.3. Niech X: dowolny zbiór. Istnieje grupa $F = F(X) = F_X \supseteq X$ taka, że X: wolny zbiór generatorów F.

D-d: • słowo nad X: ciąg $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, gdzie

$$\begin{cases} \cdot\ n \geq 0 \\ \cdot\ x_i \in X \text{ dla } i = 1, \dots, n \\ \cdot\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \end{cases}$$ (+1: pomijamy)

• np. $a, b, c \in X \rightsquigarrow a a^{-1} b a^{-1} a c$

• też: słowo puste ε

$W(X)$ = zbiór wszystkich słów nad X.

• słowo w jest <u>nieskracalne</u>, gdy nie sąsiadują w nim a^{+1} i a^{-1} dla żadnego $a \in X$.

$F_X = \{\sigma \in W(X) : \sigma \text{ nieskracalne}\}$.

działanie konkatenacji:

$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 \rightsquigarrow \\ \sigma_2 \rightsquigarrow \end{array}\right\} \rightsquigarrow \sigma_1 \sigma_2 = \underset{\sigma_1}{\rightsquigarrow}\underset{\sigma_2}{\rightsquigarrow}$ jedno za drugim

maksymalne skrócenie

np. $\underbrace{a^{-1} b b a \overbrace{b^{-1} a c}^{\text{skrócenie}}}_{\sigma_1} \underbrace{\overbrace{c^{-1} a^{-1} b}} c a^{-1} b}_{\sigma_2} = a^{-1} b b a c a^{-1} b$

nieskracalne

- łączne (ćwiczenie)
- el. neutralny ε słowo puste
- element odwrotny do $x_0^{\varepsilon_0} x_1^{\varepsilon_1} \dots x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$ to:

$$x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} x_{n-2}^{-\varepsilon_{n-2}} \dots x_0^{-\varepsilon_0}.$$

- X: zbiór wolnych generatorów grupy F_X (ćw.)

Uwaga 7.4. Grupa wolna o ≥ 2 wolnych generatorach jest nieabelowa.

<u>D-d</u> $a \neq b \in X$. W F_X: $ab \neq ba$.

Uwaga 7.5. Grupy wolne tej samej rangi są izomorficzne.

<u>D-d</u> ćw. (użyć definicji 7.1(1))

Ogólniej: produkt wolny grup G i H:

$$G * H = \left\{ \text{słowa skończone } \begin{matrix} g_1 h_1 g_2 h_2 g_3 h_3 \dots \\ h_1 g_1 h_2 g_2 h_3 g_3 \dots \end{matrix}, \text{ gdzie } \begin{matrix} e \neq g_i \in G \\ e \neq h_i \in H \end{matrix} \right\}$$

działanie:

np: $(g_1 h_1 g_2 h_2 g_3) \cdot (g_1' h_1' g_2' h_2') =$

$= g_1 h_1 g_2 h_2 (g_3 g_1') h_1' g_2' h_2'$, z możliwością skracania:

jeśli $g_3 g_1' = e_G$, to je wykreślamy.

$G * H$ z tym działaniem jest grupą, produktem wolnym grup G i H.

Przykład $F(\{a, b, c\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

Uwaga 7.6. Produkt wolny grup to ko-produkt w kategorii grup.

Tw (Nielsen - Schreier) 7.7. Podgrupa grupy wolnej jest wolna.

Tw. 7.8. Każda grupa jest homomorficznym obrazem grupy wolnej.

D-d G: grupa. Zał., że $G = \langle X \rangle$ (np. $X = G$

Niech $F = F_X$ ($= F(X)$): grupa wolna o wolnym zbiorze generatorów X.

Istnieje jedyne f' jak na diagramie (z def. 7.1(1))

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f = id_X"] \arrow[dr, "\subseteq"'] & G \arrow[d, phantom, "\#"] \\
 & F(X) \arrow[u, dashed, "f' \text{ homo}"']
\end{tikzcd}
$$

$X \subseteq \operatorname{Im} f'$ i $\langle X \rangle = G$

więc f': epi

Uwaga 7.9. Załóżmy, że $X \subseteq F \leftarrow$ grupa.
Wtedy X: zbiór wolnych generatorów F
$\iff \forall_{\substack{w \\ \neq \\ \varepsilon}} \in \mathcal{F}(X)$ (wartość w w F) $\neq e$

D-d ćw.

Lemat pingpongowy 7.10.
Niech X: nieskończony, $\alpha, \beta \in Sym(X)$,
$A, B \subseteq X$ rozłączne niepuste, takie że
$(\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \ (\alpha^k[A] \subseteq B \text{ i } \beta^k[B] \subseteq A)$.
Niech $F = \langle \alpha, \beta \rangle < Sym(X)$. Wtedy
$\{\alpha, \beta\}$: zbiór wolnych generatorów grupy F.

D-d. Wystarczy pokazać że:
dla $w \neq \varepsilon$ w $\mathcal{F}(\{\alpha, \beta\})$,
wartość w w F $\neq e$, tzn. wartość w w $F \neq id_X$.

- bso w zaczyna się i kończy potęgą α.

bo: jeśli nie, to niech $w' = j_{\alpha^k}(w) =$
$= \alpha^k w \alpha^{-k}$ w $\mathcal{F}(\{\alpha, \beta\})$

w grupie F:

$(\text{wartość } w) \neq e \iff (\text{wartość } w') \neq e$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underbrace{i_{\alpha^k}}_{\text{automorfizm grupy } F.}(\text{wartość } w)$

dla dużego k
w' zaczyna się i kończy potęgą α.

Zatem

$$w = \alpha^{k_1}\beta^{l_1}\alpha^{k_2}\dots\alpha^{k_n}\beta^{l_n}\alpha^{k_{n+1}}, \quad k_i, l_i \neq 0$$

$$B \leftarrow A \leftarrow B \leftarrow A \dots B \leftarrow A \leftarrow B \leftarrow A$$

tzn. $w[A] \subseteq B$, wsc $\underset{w\ F}{w \neq id_X}$.

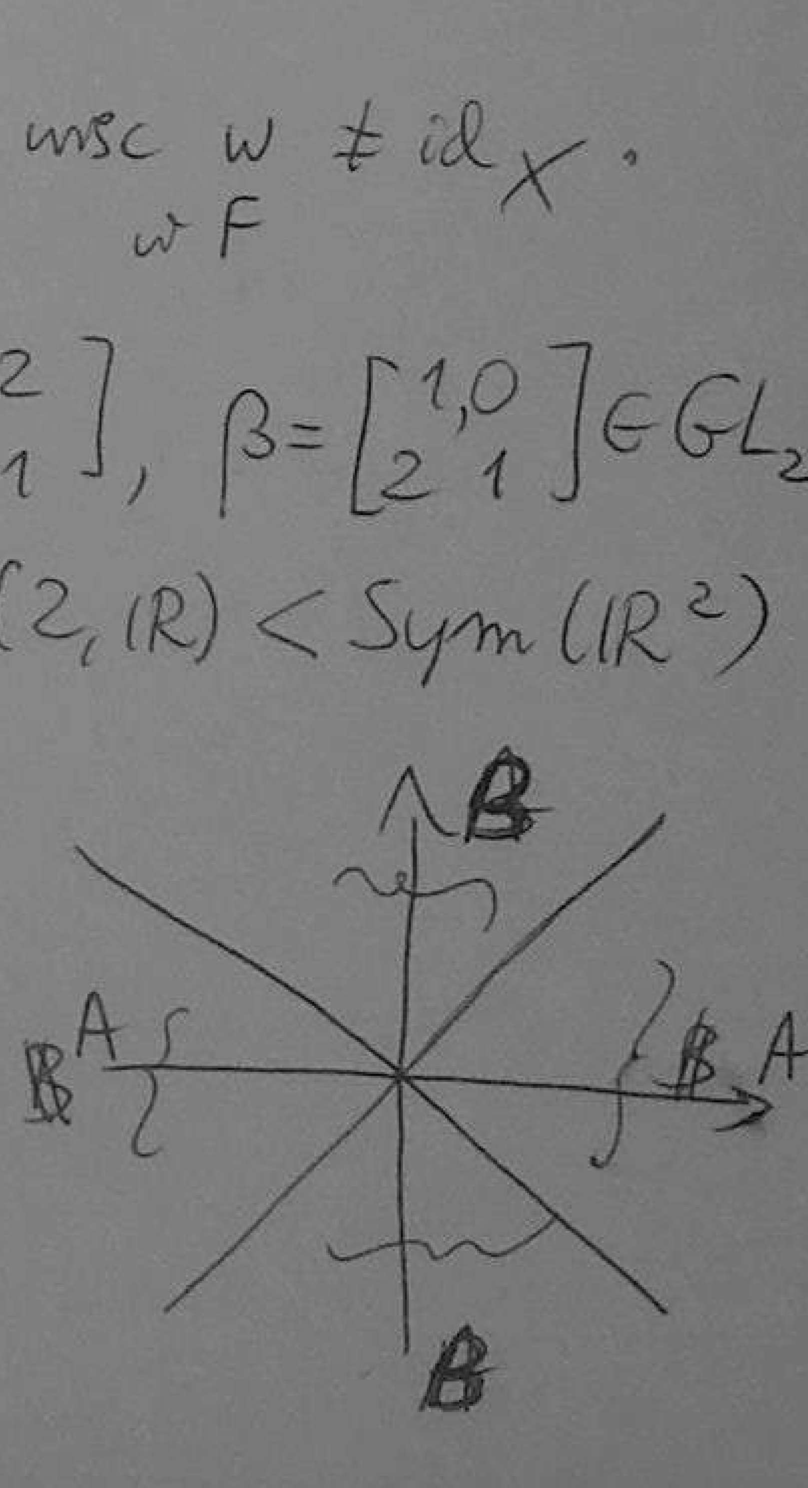
w grupie F liczone

Przykład. Niech $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$.

Wtedy $F = \langle \alpha, \beta \rangle < GL(2, \mathbb{R}) < Sym(\mathbb{R}^2)$
wolna rangi 2.

$B\ \cancel{A} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y|\}$

$A\ \cancel{B} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\}$



$$\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\y\end{pmatrix},\quad \alpha^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y\\y\end{pmatrix}$$

dla $k\neq 0$

$$\alpha^k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2ky\\y\end{pmatrix},$$ więc

gdy $\langle x,y\rangle\in B$, to $|x|<|y|$

$$\Downarrow$$

$$|x+2ky|>|y|\Rightarrow \alpha^k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in A.$$

Podobnie:

$\beta^k[A]\subseteq B$ + lemat pingpongowy.

Grupy prezentowane przez relacje.

Def. 7.11. Niech X: zbiór liter, zaś R: pewien zbiór równości postaci $\sigma_1=\sigma_2$, gdzie $\sigma_1,\sigma_2\in\mathcal{F}(X)$ ["zbiór relacji"].

$\langle X\mid R\rangle=\mathcal{F}(X)/N$, gdzie N: najmniejszy dzielnik normalny w $\mathcal{F}(X)$ zawierający zbiór $D=\{\sigma_1\sigma_2^{-1}: "\sigma_1=\sigma_2"\in R\}$.

grupa generowana przez X, prezentowana (opisana) przez relacje R.

lub też:

$\langle X \mid R \rangle$: grupa generowana przez X i relacje R.

Wyjaśnienie:

dzielnik normalny generowany przez $D \subseteq F(X)$ to $\langle \bigcup_{g \in F(X)} D^g \rangle$.

Uwaga 7.12. Załóżmy, że $X \subseteq G$ i w G zachodzą relacje z R. Wtedy

$$\exists!\, f : \langle X \mid R \rangle \xrightarrow[\text{homo}]{} G \quad f|_X = id_X.$$

<u>Przykłady.</u>

1. $X = \{a, b\}$, $R = \{ab = ba\}$.
   $\langle X \mid R \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, wolna grupa abelowa rangi 2.

2. X: dowolny, $R = \{ab = ba : a, b \in X\}$
   $\langle X \mid R \rangle$: wolna grupa abelowa rangi $|X|$.

Def. 7.13. Gdy R: skończony, mówimy, że grupa $\langle X \mid R \rangle$ ma opis skończony (skończoną prezentację).

Uwaga 7.14.
Każda grupa skończona ma opis skończony.

D-d

$G = \{g_1, \dots, g_n\} = X \quad R = \{ "g_i g_j = g_k" : g_i g_j \overset{w\,G}{=} g_k \}$

$G \cong \langle \{g_1, \dots, g_n\} \mid R \rangle.$

Problem Burnside'a:

Czy grupa $B_{k,n} := \langle X \mid R \rangle$ jest skończona?

gdzie $|X| = k$ (liczba generatorów), n: wykładnik, $R = \{ "\sigma^n = e" : \sigma \in \mathcal{F}(X) \}$

1960: odp: NIE ZAWSZE (Adian, Novikov)
(dla dużych $\underline{\underline{n}}$, k).
Ale: dla $n = 2, 3$: tak.

Abelianizacja, Komutant. G: grupa.

Def. 7.15. (a) $[g, h] = g h g^{-1} h^{-1}$ komutator elementów $g, h \in G$.

(b) $[G, G] = \langle [g, h] : g, h \in G \rangle$.
komutant grupy G.

Uwaga 7.16. (1) $[g,h]=e \Leftrightarrow gh=hg$
(test na przemienność)

(2) $[G,G] \lhd G$, więcej: $[G,G]$ jest podgrupą charakterystyczną grupy G.

D-d. (2) Niech $f \in \mathrm{Aut}(G)$. Wtedy

$$f([g,h]) = [f(g), f(h)]$$

więc

$$f([G,G]) = \langle \underbrace{f([g,h])}_{\substack{\shortparallel \\ [f(g),f(h)]}} : g,h \in G \rangle = \langle [g,h] : g,h \in G \rangle = [G,G].$$

Uwaga 7.16. (3) $G/[G,G]$ jest abelowa

(4) $[G,G]$ jest najmniejszą normalną podgrupą $H \lhd G$ t. że G/H jest abelowa.

(5) Jeśli $f : G \xrightarrow[\text{homo}]{} H \leftarrow$ abelowa, to $[G,G] \subseteq \mathrm{Ker} f$, więc $\exists!\ \bar{f} : G/[G,G] \longrightarrow H$ t. że $f = \bar{f} \circ j$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j"', "\text{ilorazowe}"'] & \arrow[d, phantom, "\#"] & H \\
& G/[G,G] \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

D-d (3) Niech $j: G \longrightarrow G/[G,G]$ ilorazowe.

dla dowolnych $g, h \in G$:

$$[j(g), j(h)] = j(\underset{\underset{[G,G]=\ker j}{\cap}}{[g,h]}) = e_{G/[G,G]},$$

więc w $G/[G,G]$
$j(g)$ i $j(h)$ komutują.

(4) Jeśli $H \lhd G$ i G/H abelowa to

$$\underbrace{j_H}_{\substack{\text{ilorazowe} \\ G \to G/H}}(ghg^{-1}h^{-1}) = e_{G/H} \text{ dla wszystkich } g, h \in G,$$

więc $[G,G] \leq \ker j_h = H$.

(5): Ćw.

Def. 7.17. $G_{ab} := G/[G,G]$ abelianizacja grupy G.

Uwaga 7.18. $\mathcal{F}(X)_{ab} \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}x$ wolna grupa abelowa rangi $|X|$.

D-d zad. na liście.

Def. 8.1. Ciąg normalny grupy G (długości k):

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \ldots \rhd G_k = \{e\}.$$

G_{i-1}/G_i : faktory tego ciągu.

<u>Przykład</u> $G' := [G, G]$: komutant grupy G, grupa pochodna grupy G.

iterujemy:

$G^{(0)} = G$, $G^{(i+1)} = (G^{(i)})' = [G^{(i)}, G^{(i)}]$, $i = 0, 1, 2 \ldots$

ciąg iterowanych komutatorów grupy G (iterowanych pochodnych grupy G).

$G = G^{(0)} \rhd G^{(1)} \rhd G^{(2)} \rhd \ldots$ ciąg podgrup normalnych gpy G.

Def. 8.2.

G : <u>rozwiązalna</u> $\Leftrightarrow$ $\exists k \geq 0$ $G^{(k)} = \{e\}$

najmniejsze takie k : stopień rozwiązalności grupy G.

Fakt 8.3.

G : rozwiązalna $\Leftrightarrow$ $\exists$ ciąg normalny grupy G o faktorach abelowych

<u>Przykłady</u>. S_1, S_2, S_3, S_4 są rozwiązalne

$S_5, S_6, S_7 \ldots$ nie

bo $A_5' = A_5$.

Pogadanka

AII. 13

Def. 8.4. (1) Aksjomat równościowy:

$$\sigma_1(\bar{x}) = \sigma_2(\bar{x})$$: równość wyrażeń algebraicznych.

(2) Rozmaitość algebraiczna:
klasa algebr definiowana przez układ aksjomatów równościowych.

Przykłady rozmaitości:

- półgrupy : $x(yz) = xy(z)$
- grupy : $x(yz) = (xy)z$, $ex = xe = x$, $xx^{-1} = x^{-1}x = e$
- grupy abelowe : dodatkowo $xy = yx$
- przestrzenie liniowe/$\mathbb{R}$
- algebry Boole'a : $\mathbb{B} = (\mathbb{B}, \vee, \wedge, ', \mathbb{0}, \mathbb{1})$
  ($\vee, \wedge$: łączne, wzajemnie rozdzielne, ...)
  ("ciała zbiorów").
- grupy rozwiązalne stopnia $\leq k$:

aksjomaty:

$k=1$: $[x_1, y_1] = e$

$k=2$: $[[x_1, y_1], [x_2, y_2]] = e$

$k=3$: $[[[x_1, y_1], [x_2, y_2]], [[x_3, y_3], [x_4, y_4]]] = e$

(iterowane komutatory)

Def. 8.5. Niech R : rozmaitość algebr, $X \subseteq \mathbb{A} \in R$.

(1) X : wolny zbiór generatorów algebry $\mathbb{A}$, gdy $\forall \mathbb{B} \in R \; \forall f : X \longrightarrow \mathbb{B} \; \exists! \underset{f \subseteq}{f'} : \mathbb{A} \underset{\text{homo}}{\longrightarrow} \mathbb{B}$

(2) $\mathbb{A} \in R$: <u>wolna</u>, gdy $\exists \underset{\text{wolny zbiór generatorów.}}{X \subseteq \mathbb{A}}$

Tw. 8.6. Załóżmy, że w rozmaitości R algebr jest algebra mocy > 1.

Wtedy w R są algebry dowolnie dużej mocy i $\forall X \; \exists \mathbb{A} \in R \; \underset{\text{wolny zbiór generatorów.}}{X \subseteq \mathbb{A}}$