Wykład 4.

Ostatnio:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{homo}} & \mathrm{Aut}(G) < \mathrm{Sym}(X) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ g & \longmapsto & \varphi(g) = j_g \end{array}$$

automorfizm wewnętrzny G wyznaczony przez g

$$j_g(x) = \cancel{g} x g^{-1}$$

Def. 4.1 (sprzężenie w grupie G)

(1) G działa na sobie przez sprzężenie (conjugation):

$$g \cdot x \overset{def}{=} g x g^{-1} \overset{ozn.}{=} x^g$$

$$G \ni g, \quad x \in X = G$$

(2) Orbity tego działania zwą się klasami sprzężenia (sprzężoności?)

klasa sprzężenia elementu $x \in G$: conjugacy classes.

$$x^G := \{x^g : g \in G\}$$

Uwaga 4.2. Zał, że ~~G~~ $G \curvearrowright X$ oraz $x \in X$ i $y = g \cdot x$ dla ~~pewn~~ pewnego $g \in G$. Wtedy

(1) $G_y = g G_x g^{-1} = (G_x)^g$

(2) $|O(x)| = [G : G_x]$ ← już było, lub: Ćwiczenie

D-d (1) $h \in G_y \iff h \cdot y = y$

$\iff h \cdot g \cdot x = g \cdot x$

$g^{-1}\cdot$ \ $y = g \cdot x$

$\iff g^{-1} \cdot h \cdot g \cdot x = x$

$\iff (g^{-1}hg) \cdot x = x$

$\iff g^{-1}hg \in G_x$

$\iff h \in g G_x g^{-1}$

wsc $G_y = g G_x g^{-1}$

Def. 4.3. Działanie $G \circlearrowright X$ jest tranzytywne (przechodnie), gdy w X jest tylko jedna orbita, tzn:

$(\forall x, y \in X)(\exists g \in G)\ g \cdot x = y$

Załóżmy, że $G \circlearrowright X$. Wtedy $X/G := \{\mathcal{O}(x) : x \in X\}$

Dla $g \in G$ $\quad Fix_X(g) = \{x \in X : g \cdot x = x\}$

(zbiór punktów stałych g w X)

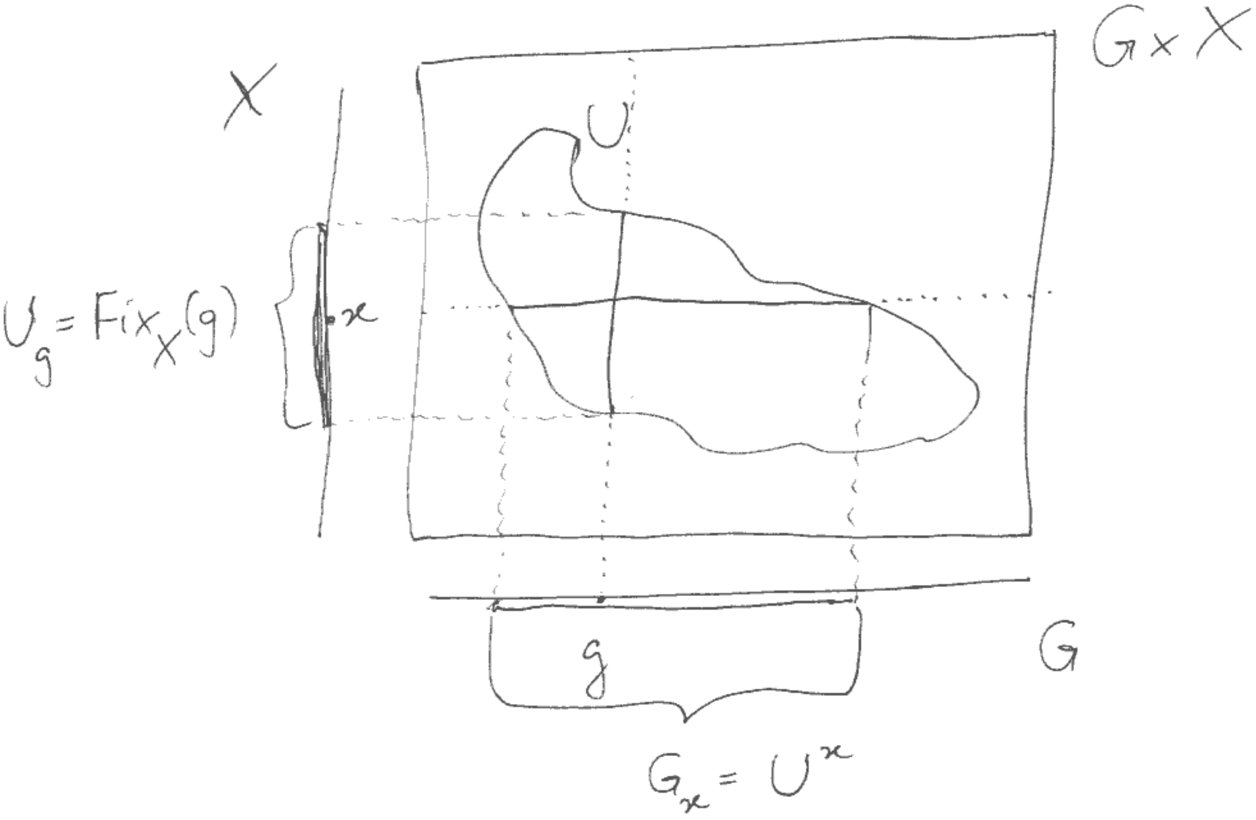
Lemat 4.4 (Burnside)

$$|G| \cdot |X/G| = \sum_{g \in G} |Fix_X(g)|,$$

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix_X(g)|$$

Dowód (gdy G: skończona)

Niech $U = \{\langle g, x\rangle \in G\times X : g\cdot x = x\} \subseteq G\times X$



$$\sum_{g\in G} |Fix_X(g)| = |U| = \sum_{x\in X} |G_x| = \sum_{x\in X} \frac{|G|}{|O(x)|} =$$

z 4.2(2) lub 3.14(3):
$|O(x)| = |G/G_x| = [G:G_x]$
$|O(x)|\cdot|G_x| = |G|$

$$= |G|\cdot \sum_{O\in X/G} \underbrace{\sum_{x\in O} \frac{1}{|O|}}_{=1} = |G|\cdot \sum_{O\in X/G} 1 = |G|\cdot|X/G|$$

Ćw. Udowodnić to dla G nieskończonej.

Zastosowanie lematu Burnside'a

Z 3 czarnych i 6 białych koralików tworzymy naszyjniki.

Na ile sposobów można to zrobić zakładając, że naszyjniki można obracać i odwracać?

Rozwiązanie.

- koraliki układamy w wierzchołkach 9-kąta foremnego

kolorujemy te wierzchołki na B lub C

$X = \{$wszystkie możliwe kolorowania tych wierzchołków na 6 B i 3 C$\}$

$$|X| = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$$

$D_9 \curvearrowright X$

Liczba sposobów utworzenia naszyjnika =

$$N = \left| X/D_9 \right|$$

z lematu Burnside'a:

$$N = \frac{1}{|D_9|} \cdot \sum_{g \in D_9} |Fix_X(g)|$$

Dla $g, h \in D_9$, $g \underset{\uparrow}{\sim} h \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

(Ćw) (ćwiczenie) sprzężone $|Fix_X(g)| = |Fix_X(h)|$

Ogólniej:

W dowolnej grupie G:

$g \underset{\uparrow}{\sim} h \Leftrightarrow g$ i h są w tej samej klasie sprzężenia

są sprzężone

$\Leftrightarrow \exists u \in G \quad g = h^u$

$\Leftrightarrow \exists u \in G \; g = j_u(h)$

Tabelka:

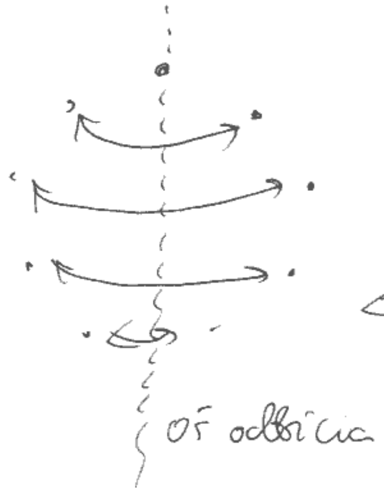
rodzaj $g \in D_9$	rząd g	liczba s elementów g tego rodzaju	$\lvert Fix_X(g)\rvert$	$s \cdot \lvert Fix_X(g)\rvert$
id	1	1	84	84
(*) odbicie (nast. strona)	2	9	4	36
obrót o kąt $\frac{2\pi}{3}$ lub $\frac{2\pi}{4}$	3	2	3	6
pozostałe obroty	9	6	0	0

$\sum_{g \in D_9} |Fix_X(g)| = \underline{\underline{126}}$

$N = \frac{1}{18} \cdot 126 = 7$

(*) · $|Fix_X(g)|=4$, gdy $g\in D_9$ odbicie

Odbicie g :



kolorowanie $\in Fix_X(g)$?

← te same kolory &

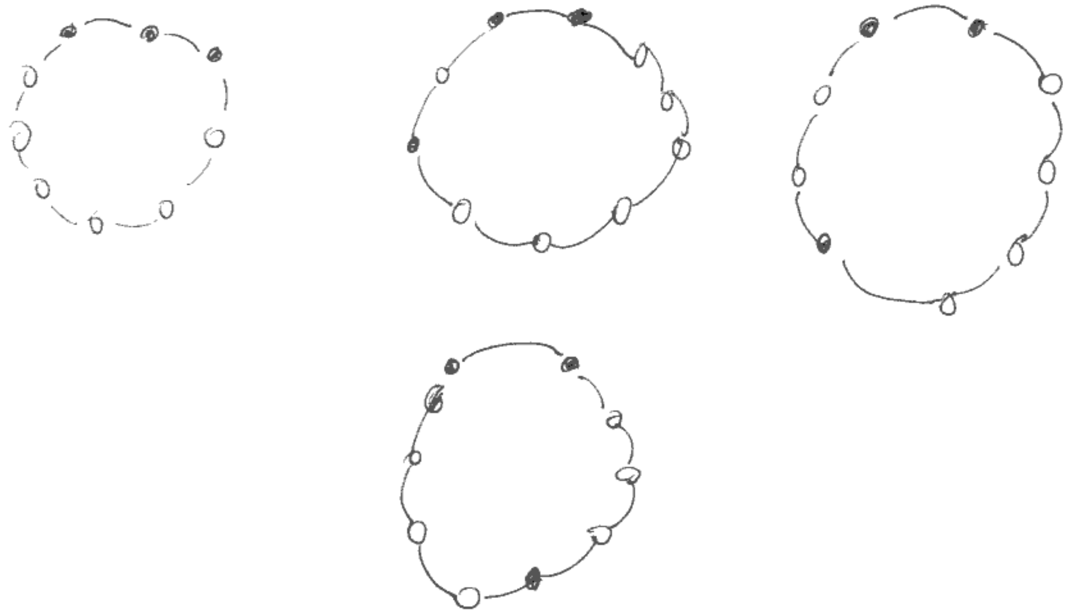
3C i 6B.

Jak rozłożyć 3C ?

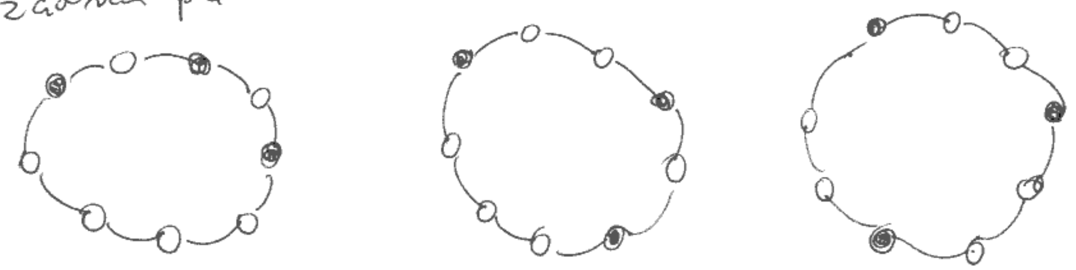
$\boxed{\text{4 sposoby}}$

Wszystkie naszyjniki :

• pewna para C sąsiaduje :



• żadna para C nie sąsiaduje :



(AII.4., 7

<u>Przykład</u> Grupy permutacji S_n, $n \geq 1$, $|S_n| = n!$

$sgn : S_n \xrightarrow{epi} (\{\pm 1\}, \cdot)$ $Ker(sgn) = A_n$: n-ta grupa alternująca

$[S_n : A_n] = 2$

$A_n \triangleleft S_n$

$|A_n| = \frac{n!}{2}$

$S_n / A_n \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$

$\sigma \in S_n$: rozkład na (iloczyn) cykle rozłącznych
(jednoznaczny z dokł. do kolejności czynników)

$\sigma = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$: cykle rozłączne, komutują
α_i cykl długości l_i
$\Downarrow$
$ord(\alpha_i) = l_i$

$ord(\sigma) = NWW(l_1, \dots, l_k)$

Notacja: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} =$

<u>cykl</u>: $= (1, 2, 7, 6)(4, 5)$

cykle

Konstrukcje grup.

(a) produkt grup

G, H : grupy $\rightsquigarrow$ $G \times H$ produkt kartezjański

działanie po osiach : $\langle g_1, h_1\rangle \cdot \langle g_2, h_2\rangle = \langle g_1 g_2, h_1 h_2\rangle$

$G \times H$ z tym działaniem : grupa, produkt grup G i H.

- $e_{G\times H} = \langle e_G, e_H\rangle$
- $\langle g, h\rangle^{-1} = \langle g^{-1}, h^{-1}\rangle$

$\pi_1 : G\times H \longrightarrow G$, $\pi_2 : G \times H \longrightarrow H$ rzutowania na współrzędne

epimorfizmy

Uwaga 4.5.

$(G\times H, \pi_1, \pi_2)$ jest produktem w kategorii grup,

tzn. $\forall (\underset{\text{grupa}}{K}, \underbrace{\pi_1', \pi_2'}_{\text{homomorfizmy}})\ \exists! f$ jak na rysunku:

$$\begin{tikzcd}
 & G\times H \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
G \arrow[r, phantom, "\#"] & & H \arrow[l, phantom, "\#"] \\
 & K \arrow[ul, "\pi_1'"] \arrow[ur, "\pi_2'"'] \arrow[uu, dotted, "\exists! f"] &
\end{tikzcd}$$

D-d : Ćw.

$f(\underset{K}{\underset{\cap}{k}}) = \underset{G\times H}{\underset{\cap}{\langle \pi_1'(k), \pi_2'(k)\rangle}}$

<u>Kategoria</u>: $(Ob, Mor, \circ)$

- Ob: klasa obiektów
- Mor: klasa morfizmów (strzałki między obiektami)
- $\circ$: złożenie morfizmów (o zgodnych dziedzinach i kodziedzinach.

dla $A, B \in Ob$

$$Mor(A, B) = \{\text{morfizmy z } A \text{ do } B\}$$

$$f: \underset{\substack{\parallel \\ \mathrm{Dom}\, f}}{A} \longrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ \mathrm{Codom}(f)}}{B}$$

$$Mor = \dot{\bigcup_{\langle A, B\rangle \in Ob^2}} Mor(A, B), \quad Mor(A, A) \ni id_A$$

wyróżnione morfizmy

częściowe

- składanie: $\circ : Mor \times Mor \xrightarrow{\circ} Mor$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \mathrm{Dom}\, g = \mathrm{Codom}\, f$$

- Łączność: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (pod warunkiem, że obie strony są określone)
- własności id_A: $id_A \circ f = f$, $g \circ id_A = g$

$$B \xrightarrow{f} A \qquad A \xrightarrow{g} C$$

Przykłady kategorii:

- Sets (zbiory) Obiekty: zbiory
  Morfizmy: funkcje między zbiorami.

- Groups (grupy): morfizmy: homomorfizmy grup.

- Netypowy przykład:

  $G = (G, \cdot)$ grupa.

Kategoria $\mathcal{G}$: $Ob = \{*\}$

$$Mor(*, *) = G$$

$$\circ = \cdot$$

$\mathcal{A}$: kategoria

<u>Def.</u> <u>Produkt</u> obiektów $A, B \in Ob(\mathcal{A})$ to:

~~obiekt~~ układ $(\underset{\substack{\uparrow \\ Ob(\mathcal{A})}}{C}, \pi_1, \pi_2)$ taki, że

$\pi_1 : C \longrightarrow A$
$\pi_2 : C \longrightarrow B$ morfizmy

zachodzi warunek

z uniwersalny z Uwagi 4.5.

<u>Ćw.</u> Ten warunek definiuje C z dokładnością do izomorfizmu.

~~ko-prod~~

produkt: A i B w $\mathcal{A}$ ko-produkt A i B w $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ A & & B \\ & D \arrow[ul, "\pi_1'"] \arrow[ur, "\pi_2'"'] \arrow[uu, dotted, "\exists! f"] & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & C \arrow[dd, dotted, "\exists! f"] & \\ A \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_1'"'] & & B \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[dl, "i_2'"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

w kategorii Sets: produkt A i B to $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$

ko-produkt A i B to "suma rozłączna": $(A \sqcup B, i_1, i_2)$

w kategorii Vect: produkt = ko-produkt

~~w kate~~.

<u>Pytanie</u>: Czy w kategorii grup istnieje ko-produkt?

<u>Problem</u>: Jak rozpoznać, czy dana grupa jest $\cong G \times H$ dla pewnych G, H?

<u>TW</u> 4.6. (o produkcie wewnętrznym)

Zał., że $H_1, H_2 < G$ oraz:

(1) $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ (2) $\forall h_1 \in H_1 \ \forall h_2 \in H_2 \ h_1 h_2 = h_2 h_1$ (H_1 i H_2 komutują)

(3) $H_1 H_2 = G$.

Wtedy $f : H_1 \times H_2 \longrightarrow G$ dana wzorem

$$f(h_1, h_2) = h_1 h_2$$

jest izomorfizmem grup.

Def. 4.7. W sytuacji jak w tw. 4.6 mówimy, że G jest produktem wewnętrznym grup H_1 i H_2.

D-d. • f homomorfizm + "na" : ćw.

• f : 1-1 bo: $\ker f = \{e\}$

bo: zał. że $f(h_1, h_2) = e$, tzn:

$$\underset{\in H_1}{h_1} \cdot \underset{\in H_2}{h_2} = e \iff h_1 = h_2^{-1} \in H_1 \cap H_2 = \{e\}$$

$$\iff h_1 = h_2 = e.$$

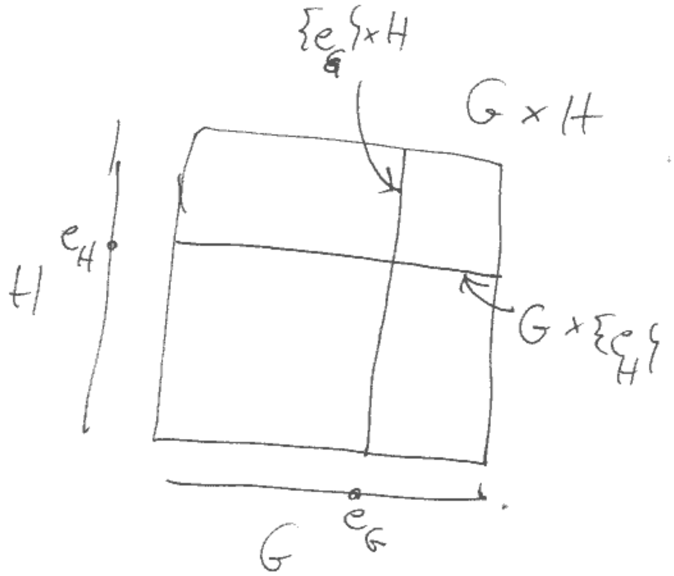
Przykłady (0) Abstrakcyjny:

~~$G \times H > G \times \{0\}$~~

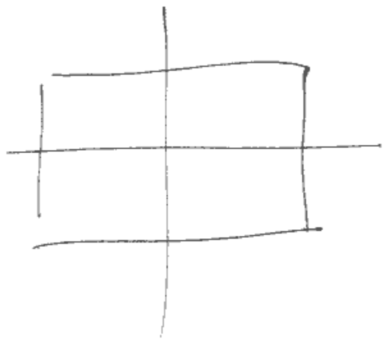
$G \times H > \underbrace{G \times \{e_H\}, \{e_G\} \times H}_{\text{osie produktu}}$

$G \times H$ jest produktem wewnętrznym grup

$G \times \{e_H\}, \{e_G\} \times H$



(1) $K_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$



D-d $K_4 = \{e, a, b, c\}$ $a^2 = b^2 = c^2 = e$

abelowa

$H_1 = \{e, a\}$

$H_2 = \{e, b\}$ spełniają założenia tw 4.6, więc

$ab = c$ $K_4 \cong H_1 \times H_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Ogólniej: $\{G_i : i \in I\}$ rodzina grup

$$\prod_{i\in I} G_i = \{\langle g_i \rangle_{i\in I} : \forall i \in I \ g_i \in G_i\}$$ produkt grup $\{G_i\}_{i\in I}$

działania po osiach:

$$\langle g_i \rangle_{i\in I} \cdot \langle h_i \rangle_{i\in I} = \langle g_i h_i \rangle_{i\in I}$$

$\vdots$

$$\pi_{i_0} : \prod_{i\in I} G_i \xrightarrow[\text{na } i_0\text{-tą współrzędną}]{\text{rzut}} G_{i_0}$$, epimorfizm

Zad: Sformułować odpowiednik tw. 4.6.

(6) Suma prosta grup $\{G_i\}_{i\in I}$:

$$G = \sum_{i\in I} G_i < \prod_{i\in I} G_i$$

$$\sum_{i\in I} G_i = \{\langle g_i \rangle_{i\in I} : \{i \in I : g_i \neq e_{G_i}\} \text{ skończony}\}$$

Przykład ~~G_{ab}~~ $\mathcal{G}_{ab}$: kategoria grup abelowych

tu: $(G_1 \times G_2, \pi_1, \pi_2)$ ~~jest~~ jest produktem grup G_1 i G_2,

ale też $(G_1 \times G_2, i_1, i_2)$ jest ko-produktem grup G_1 i G_2

$$i_1 : G_1 \longrightarrow G_1 \times G_2$$

$$i_1(g_1) = \langle g_1, e_{G_2} \rangle$$

$$i_2 : G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2$$

$$i_2(g_2) = \langle e_{G_1}, g_2 \rangle$$

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \times G_2 \arrow[dd, dashed, "\exists! f"] & \\
G_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_1'"'] \arrow[r, phantom, "\#"] & & G_2 \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[dl, "i_2'"] \arrow[l, phantom, "\#"] \\
 & H &
\end{tikzcd}$$

$$f(\langle g_1, g_2 \rangle) = \\ = i_1'(g_1) \cdot i_2'(g_2)$$

to nie działa w kategorii Groups

~~Dlal~~ Dlaczego?