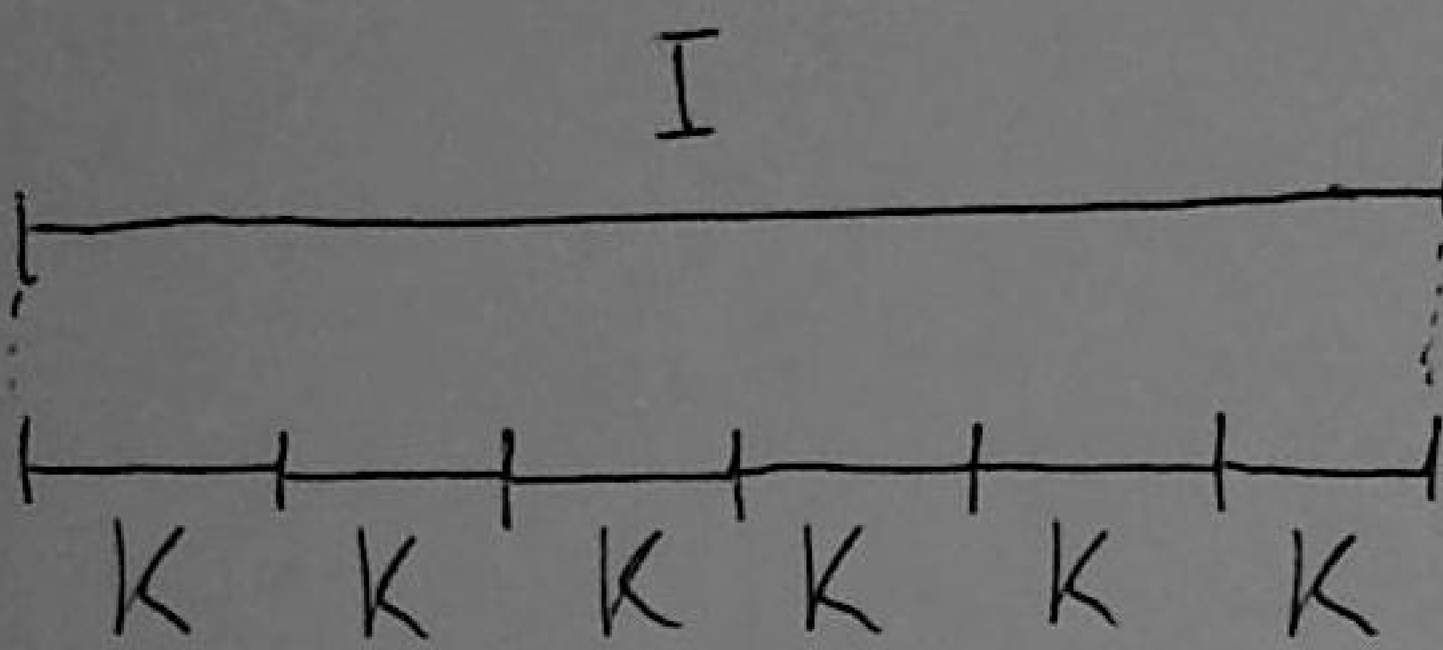
Wykład 12a

I, J: odcinki.

<u>Def.</u> I i J są <u>współmierne</u>, gdy istnieje odcinek K taki, że $I = nK$ i $J = mK$ dla pewnych $n, m \in \mathbb{N}^+$.



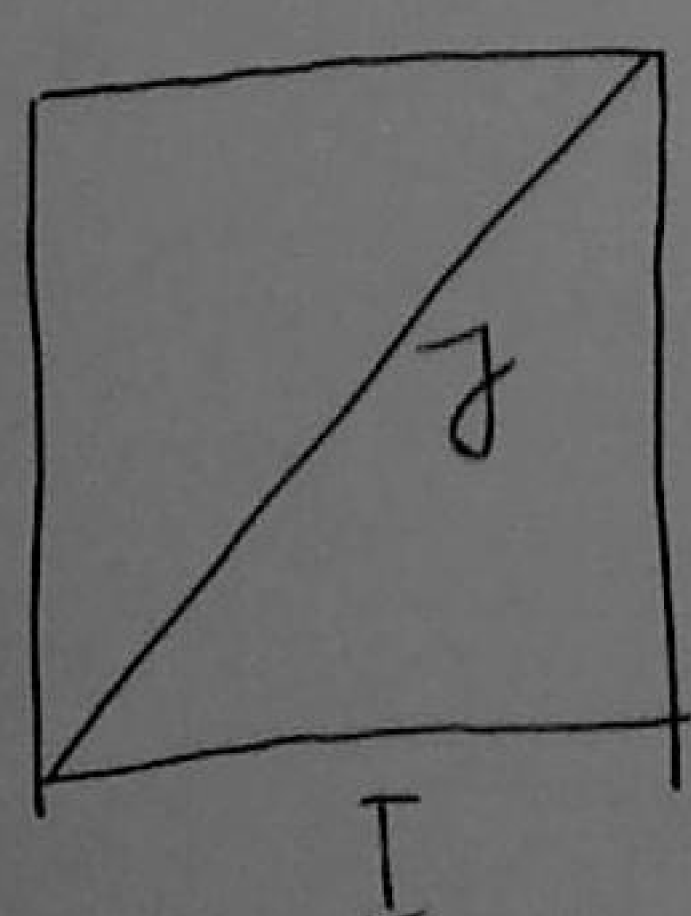
$I = 6K$

Pitagoras (VI/V w. pne), związek pitagorejski

"Liczby są podstawą rzeczywistości"

- "każde 2 odcinki są współmierne".

<u>Kryzys:</u>



I i J nie są współmierne

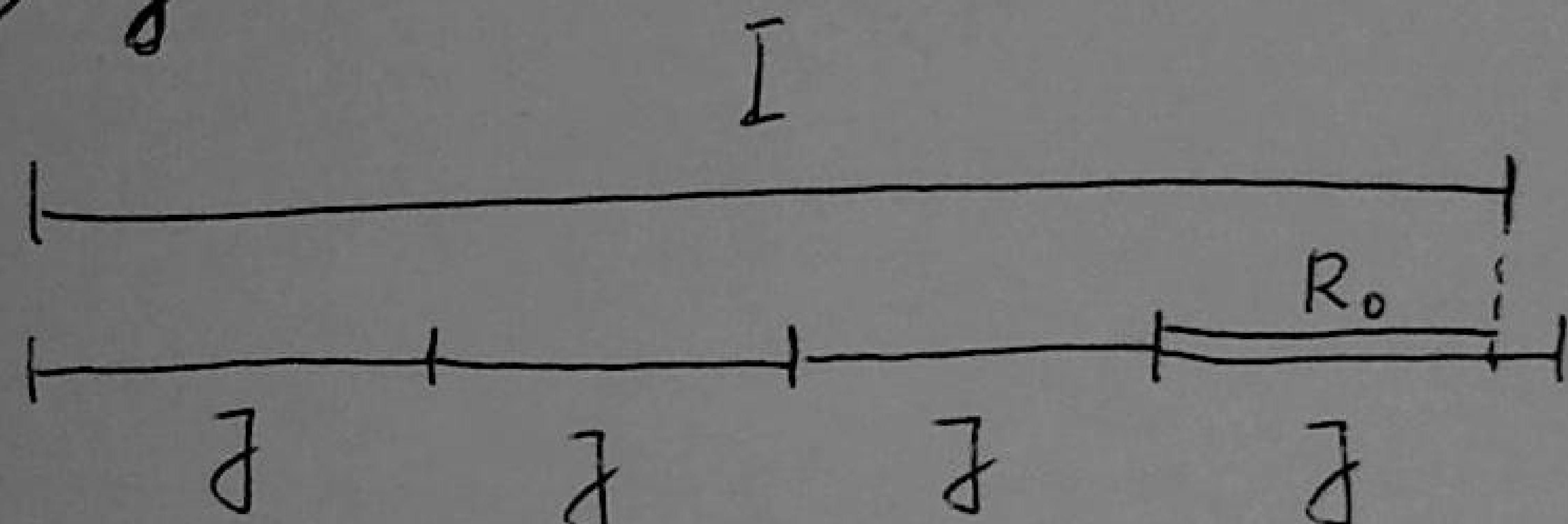
- jeden z Pitagorejczyków rozwinął teorię "wielkości niewspółmiernych";

• rachunek na obiektach geometrycznych.
(podobne do liczb niewymiernych)

Euklides, Elementy, IV w. pne.

· algorytm znajdowania wspólnej miary dla odcinków I, J. (kluczowe: dzielenie z resztą;

$I > J$



$$I = \underset{\substack{\shortparallel \\ n_0}}{3} J + R_0 \qquad I > J > R_0$$

$$J = n_1 R_0 + R_1 \qquad R_0 > R_1$$

$$R_0 = n_2 R_1 + R_2 \qquad R_1 > R_2$$

$$\vdots$$

$$R_k = n_{k+1} R_{k+1} + R_{k+2} \qquad R_{k+1} > R_{k+2}$$

gdy $R_{k+2} = 0$, <u>koniec</u>.

Wtedy R_{k+1}: wspólna miara odcinków I, J największa semi-algorytm:

- jeśli I, J współmierne, to po skończenie wielu krokach daje wynik,
- jeśli I, J niewspółmierne, to się nie zatrzymuje.

K: ciało. Pierścienie ilorazowe pierścienia $K[X]$:

$\{0\} \neq I \underset{\neq}{\lhd} K[X]$, $I = (f)$, $\overbrace{\deg f}^{n} > 0$.

- dzielenie z resztą w $K[X]$:

dla $g \in K[X]$ $\quad g = q \cdot f + r$, $\deg r < \deg f$

$r = r_f(g)$; reszta z dzielenia (jedyna)

Uwaga 13.1. (1) $g \in I \Leftrightarrow r_f(g) = 0$

(2) $g + I = r_f(g) + I$

(3) $K[X]/I = \{r + I : r \in K[X], \deg r < \deg f\}$

$\Updownarrow$ 1-1, na

$K_{n-1}[X] = \{r \in K[X] : \deg r < \underset{\deg f}{\overset{\parallel}{n}}\}$

(w każdej warstwie $g + I$ istnieje jedyny $r \in K[X]$

AT, 2a (4)

stopnia $< n$, $r = r_f(g)$)

D-d. Ćw.

Def. $r + I$: postać normalna warstwy $g + I \in K[X]/I$.

Ogólniej (nieobowiązkowe)

$I = (f_1, \dots, f_s) \triangleleft K[\bar{X}]$, $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$

<u>Problem</u>: Dany $f \in K[\bar{X}]$. Czy $f \in I$?

$f \in I \iff f = \sum_{i=1}^{s} g_i f_i$, $g_i \in K[\bar{X}]$, ale: jak rozstrzygnąć czy takie g_i <u>istnieją?</u>

$K[\bar{X}] \ni f(\bar{X}) = \sum_{\bar{\beta}} a_{\bar{\beta}} X^{\bar{\beta}}$, $a_{\bar{\beta}} \in K$, gdzie

$\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ wieloindeks

$X^{\bar{\beta}} = X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n}$

Jak dzielić z resztą w $K[\bar{X}]$?

$$\deg(\underset{\substack{\neq \\ 0}}{a_{\bar\beta}} X^{\bar\beta}) = \sum_i \beta_i = \beta_1 + \dots + \beta_n.$$

$$\begin{cases} \deg f = \max\{\{\sum \bar\beta : a_{\bar\beta} \neq 0\}, \text{ gdy } f \neq 0 \\ \deg 0 = -\infty. \end{cases}$$

Def. 13.2.

(1) $\leq_0$: porządek częściowy na $\mathbb{N}^n$, po osiach:

$$\bar\alpha \leq \bar\beta \iff \alpha_i \leq \beta_i \text{ dla } i = 1, \dots, n.$$

(2) Porządek liniowy

$\precsim$ w $\mathbb{N}^n$ jest <u>dopuszczalny</u>, gdy

(a) $\bar 0$: najmniejszy

(b) $\bar\alpha \precsim \bar\beta \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dodawane po osiach}}}{\bar\alpha + \bar\gamma} \precsim \bar\beta + \bar\gamma$

[wtedy $\leq_0 \subseteq \precsim$]

(3) • $\precsim \rightsquigarrow \prec$: ścisła (ostra) wersja $\precsim$

• $\precsim$ na $\mathbb{N}^n$ indukuje $\precsim$ na $\mathbb{T}^n = \{X^{\bar\beta} : \bar\beta \in \mathbb{N}^n\}$

$$\beta \longleftrightarrow X^{\bar\beta}$$

Uwaga 13.3.

$\precsim$: dopuszczalny $\Rightarrow$ $\precsim$ dobry (i $\mathrm{ot}(\mathbb{N}^n, \precsim) \leq \omega^n$)

d-d dw.