

Teoria: Wyliczenie małych grup (do rzędu 8 włącznie). Ósemkowa grupa kwaternionów  $\mathbb{Q}_8$ . Grupy abelowe: suma prosta grup abelowych.  $p$ -prymarna składowa. Część torsyjna. Grupa beztorsyjna.  $G_t = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} G_p$ . Wolna grupa abelowa. Podgrupa wolnej grupy abelowej rangi skończonej jest wolna. Skończona grupa abelowa jest sumą prostą grup cyklicznych (informacyjnie). Skończenie generowana grupa abelowa jest sumą prostą grup cyklicznych.

1. - Wyznaczyć wszystkie (z dokładnością do izomorfizmu) grupy abelowe rzędu 12, bez powtórzeń.
2. - Załóżmy, że  $f : G \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$  jest epimorfizmem grup abelowych. Udowodnić, że  $G \cong (\mathbb{Z}, +) \times \text{Ker}(f)$  (wsk: powtórzyć dowód z wykładu).
3. Udowodnić, że każda grupa abelowa jest homomorficznym obrazem wolnej grupy abelowej.
4. Dowieść, że jeśli  $H < Z(G)$  i  $G/H$  jest cykliczna, to  $G$  jest abelowa.
5. Załóżmy, że  $G < (\mathbb{Z}^n, +)$ . Niech  $g_i \in G$  będzie takie, że współrzędne  $g_i$  o indeksach  $< i$  są zerowe, zaś (pod tym warunkiem)  $i$ -ta współrzędna  $g_i$  jest najmniejsza możliwa  $> 0$ . Jeśli takiego  $g_i$  nie ma, przyjmujemy  $g_i = 0$ . Udowodnić, że elementy  $g_1, \dots, g_n$  generują grupę  $G$ .
6. (a) Czy  $(\mathbb{Q}, +)$  jest wolną grupą abelową?  
 (b) Czy grupa  $S_\infty$  (zespolonych pierwiastków z jednościami) jest sumą prostą grup cyklicznych?  
 (wsk: mówimy, że grupa abelowa  $G$  jest podzielna, gdy  $(\forall x \in G)(\forall n > 0)(\exists y \in G)ny = x$ . Rozważyć, czy grupy z zadania są podzielne.)
7. Załóżmy, że  $G$  jest grupą abelową i  $G_1, \dots, G_n < G$ . Dowieść, że  $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_n \iff$   
 (1)  $G = G_1 + \dots + G_n$   
 (2) jeśli  $x_1 \in G_1, \dots, x_n \in G_n$  i  $x_1 + \dots + x_n = 0$ , to  $x_1 = \dots = x_n = 0$ .
8. Załóżmy, że  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$  są bazami wolnej grupy abelowej  $G$ . Udowodnić, że bazy te są równoliczne w następujący sposób: Niech  $p$  będzie ulubioną liczbą pierwszą. Rozważyć grupę ilorazową  $G/pG$ , która jest sumą prostą pewnej liczby grup cyklicznych rzędu  $p$ .  
 (a) Gdy  $\mathcal{B}$  lub  $\mathcal{C}$  jest skończona, obliczyć rząd grupy  $G/pG$  odwołując się do baz  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ .  
 (b)\* gdy obie bazy są nieskończone, użyć algebry liniowej nad ciałem  $\mathbb{Z}_p$ .
9. Mówimy, że podgrupa  $H$  grupy  $G$  jest charakterystyczna, gdy  $f[H] = H$  dla każdego automorfizmu  $f$  grupy  $G$ . Udowodnić, że:  
 (a) jeśli  $H$  jest charakterystyczna w  $G$ , to  $H \triangleleft G$ .

(b)  $Z(G)$  jest charakterystyczna w  $G$ .

(c)\* Jeśli w grupie  $G$  zachodzi równość  $x^2 = e$ , to jedyne charakterystyczne podgrupy grupy  $G$  to sama  $G$  i podgrupa trywialna.

10. \* Ile wynosi suma elementów skończonej grupy abelowej?