Algebra II (ISIM), lista 1 (14.10.2020).

Symbolem $-$ oznaczone będą ćwiczenia do samodzielnego wykonania, bez omawiania na zajęciach (chyba że na życzenie studentów). Wszystkie działania są (domyślnie) binarne. G oznacza zazwyczaj grupę.

Teoria: Działanie w zbiorze: definicja, własności działań (łaczność, przemienność, rozdzielność, element neutralny). Struktura algebraiczna, izomorfizm i homomorfizm struktur. Epi-, mono-, izo-, endo- i automorfizm. Podstruktura. Generowanie podstruktury. Indukowanie struktury (działania).

Grupa i grupa abelowa: definicja, podstawowe własności, notacja multyplikatywna i addytywna. Rząd grupy. Podgrupa: definicja, podstawowe własności, charakteryzacja podgrupy jako podstruktury. Przykłady grup: grupa czwórkowa Kleina K_4, n-ta grupa dihedralna D_n, n-ta grupa symetryczna S_n. Grupa automorfizmów struktury. n-ta grupa liniowa $GL_n(\mathbb{R}) \cong Aut(\mathbb{R}^n)$.

1. $^-$ Załóżmy, że $F : (A, \circ) \to (B, *)$ jest homomorfizmem struktur. Udowodnić, że $F[A]$ jest podstrukturą struktury B.

2. $^-$. Załóżmy, że $\emptyset \neq X \subseteq A$, gdzie $A = (A, \circ)$ jest strukturą algebraiczną. Udowodnić, że $\langle X \rangle$ jest najmniejszą podstrukturą struktury A zawierającą X.

3. Udowodnic uwagę 1.6. Podac wzór na indukowane działanie $*$.

4. $^-$ $F : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ określone jest przez: $F(0) = 1,\ F(1) = 3,\ F(2) = 0,\ F(3) = 2$. Podać tabelkę działania $*$ indukowanego w zbiorze $\mathbb{Z}_4$ przez F i $+_4$.

5. Załóżmy, że $\circ$ jest działaniem łącznym w skończonym zbiorze A. Udowndnić, ż eistnieje $a \in A$ takie, że $a \circ a = a$.

6. * W zbiorze A określone jest działanie $*$ takie, że dla dowolnych $a, b \in A$ mamy

$$(a * b) * b = a \text{ oraz } b * (b * a) = a.$$

   Udowodnić, że:
   (a) $(b * a) * b = a,\ b * (a * b) = a$.
   (b) $*$ jest przemienne.

7. W zbiorze G określone jest działanie $\circ$. Swterdzić, czy jest to dzialanie grupowe.
   (a) $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \circ y = xy$, gdy $x > 0$, oraz $x \circ y = x/y$, gdy $x < 0$.
   (b) $G = \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y$, gdy x jest parzyste, oraz $x \circ y = x - y$, gdy x jest nieparzyste.

8. $^-$ Udowodnić, że w grupie G dla każdego elementu istnieje jedyny element doń odwrotny.

9. Udowodnić uwagę 1.10.

10. (a) Podać przykład grupy $G = (G, \cdot)$ i jej podstruktury H, która nie jest podgrupą grupy G.
    (b) Udowodnić uwagę 1.12(2).

11. Niech $g \in G$. OKreślamy funkcje $l_g, r_g : G \to G$ (lewe i prawe przesunięcie o g): $l_g(x) = gx$, $r_g(x) = xg$. Udowodnić, że funkcje te są bijekcjami.

12. Udowodnić, że $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot_p)$ jest grupą.

13. załóżmy, że w grupie G, $a^2 = e$ dla wszystkich $a \in G$. Udowodnić, że G jest abelowa.

14. Wyznaczyć poniższe grupy automorfizmów.
    (a) $Aut(\mathbb{N}, +)$ – tu pokazać, że jest to grupa trywialna.
    (b)* $Aut(\mathbb{N}, \cdot)$ – tu pokazac, ż ejest ona izomorficzna z grupą $Sym(\mathbb{N})$ (w szczególności jest mocy continuum).

Program wykładu:
I. Grupy:
1. Podstawowe definicje i przykłady.
2. Działania grup. Twierdzenie Lagrange'a. Lemat Burnside'a z zastosowaniami.
3. Homomorfizmy grup, dzielniki normalne i grupy ilorazowe.
4. Grupy permutacji.
5. Twierdzenia Sylowa. Grupy małych rzędów.
6. Geometryczne przykłady grup.
7. Skończone grupy abelowe.
8. Grupa wolna i prezentacja grupy.
II. Pierścienie:
1. Podstawowe definicje i przykłady.
2. Teoria podzielności w pierścieniach, w tym warunek UFD.
3. Homomorfizmy perścieni, ideały i pierścienie ilorazowe.
4. Pierścienie ideałów głównych i poerścienie euklidesowe.
5. Dziedziny i ich ciała ułamków.
6. Jednoznaczność rozkladu w pierścieniach wielomianów.
7. Pierścienie noetherowskie. Twierdzenie Hilberta o bazie.
8. Bazy Groebnera.
III. Ciała:
1. Podstawowe definicje. Ciała jako pierścienie ilorazowe.
2. Ciała skończone. Kody BCH.

Książki:

M.Artin, Algebra
S.Lang, Algebra
Vinberg, Kurs algebry
Kostrykin, Wstęp do algebry
Gilbert, Nicholson, Modern algebra with applications

Shafarevich, Basic notions of algebra
Garrett, Abstract Algebra
Białynicki-Birula, Zarys Algebry.

Zaliczenie ćwiczeń: system 3 kolokwiów po 60 minut, na początku zajęć (3x20 pkt) + 15pkt (aktywność). Zaliczenie: minimum 28 pkt, w ty, minumum 24 za kolokwia.

Mały punkt otrzymuje się za deklarację rozwiązania podpunktu zadania z list 1-12 (bez minusu) lub jako punkt bonusowy. Za błędne rozwiązanie można uzyskać punkty ujemne (do -6). Kurs wymiany: 10 małych punktów = 1 pkt za aktywność.

Terminy kolokwiów: 4.11, 9.12 i 27.01.

Egzamin: pisemny, 150 minut.

Wspólnie z prof. Piotrem Kowalskim, wykładowcą na algebrze 1, ustaliliśmy następujące warunki przenoszenia z algebry II na algebrę 1 studentów, którzy nie dają sobie rady na algebrze II:

1. Każdy ze studentów algebry II może przenieść się na algebrę 1 do 9.11.2020 (bez żadnych warunków), składając odpowiednie podanie do dyr. T.Elsnera. Jeśli przeniesienie nastąpi po pierwszym kolokwium na algebrze II, punkty zostaną odpowiednio przeliczone.

2. Każdy ze studentów algebry II, który nie skorzystał z możliwości opisanej w punkcie 1, a uzyskał z trzech kolokwiów na algebrze II minimum 18 punktów, może przenieść się na algebrę 1 w okresie 28.01 - 1.02.2020, składając podanie do dyr. T.Elsnera. W tym przypadku student taki traci zaliczenie ćwiczeń na algebrze II, natomiast na algebrze 1 jest dopuszczony tylko do pierwszego terminu egzaminu, który jest równocześnie testem na zaliczenie ćwiczeń. Jeśli student obleje ten egzamin, uzyskuje ocenę niedostateczną na zaliczenie ćwiczeń z algebry 1. Jeśli uzyska ocenę pozytywną z egzaminu, ocena ta jest również oceną na zaliczenie ćwiczeń.

3. W związku z epidemią COVID-19 przenoszenie w trybie 1 i 2 jest uwarunkowane dostępnością miejsc.

Po akceptacji przez dyr. T.Elsnera student jest zobowiązany powiadomić prof. Piotra Kowalskiego o dołączeniu do zajęć z Algebry 1.