- $(R^*, \cdot)$ – grupa jednostek

- ZTHP: $f : R \to R_1$ epimorfizm
  $I = \ker f$, wtedy $\exists! \, \bar{f} : R/I \xrightarrow{\cong} R_1$,
  $f = \bar{f} \circ j$, czyli
$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\#"] & & R_1 \\ & R/I \arrow[ur, dashed, "\cong"', "\bar{f}"] & \end{tikzcd}$$

  Analogicznie dla
  $I \subseteq \ker f$, $I \lhd R$, $\bar{f}$ to hom.

- $\{I_t : t \in T\}$ – rodzina ideałów R
  1° $\bigcap_{t \in T} I_t \lhd R$
  2° Jeśli $\{I_t : t \in T\}$ liniowo uporządkowany przez $\subseteq$, to
  $\bigcup_{t \in T} I_t \lhd R$.
  Jeśli $I_t \neq R$, to $\bigcup_{t \in T} I_t \neq R$

- $A \subseteq R$, wtedy $\exists$ najm. $A \subseteq I \triangleleft R$, ozn. (A).

  $(A) = \{ b_1 a_1 + \ldots + b_n a_n, \ \bar{b} \in R, \bar{a} \subseteq A \}$

- K: ciało $\Rightarrow K[X]$ PID

- R jest noetherowski, gdy $\forall I \triangleleft R$ I jest skończenie generowany.

- <u>Tw. 9.18</u> $\Leftrightarrow$

  1° R jest noetherowski,

  2° Każdy wstępujący ciąg ideałów w R $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ jest od pewnego miejsca stały

  3° Każda niepusta rodzina ideałów $\mathcal{J}$ ma element maksymalny.

- <u>Tw. Hilberta o bazie</u>:

  R: noetherowski $\Rightarrow R[X]$ też.

- Wn. jeśli K: ciało, to $K[X_1, \ldots, X_n]$ noetherowski

- **Def** R jest dziedziną, gdy nie ma dzielników 0. $(0 \neq 1)$

- **Def** R: dziedzina, wtedy

$\delta : R \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ jest normą euklidesową, gdy

(i) $\delta(x) = -\infty \iff x = 0$

(ii) $(\forall a, \underset{\neq 0}{b} \in R)(\exists q, r \in R)$

$$a = qb + r \text{ oraz } \delta(q) > \delta(r)$$

(czyli też $\delta(b) > \delta(0)$)

- $\mathbb{Z}[i]$ – pierścień Gaussa,

$$\delta(a + bi) = \begin{cases} -\infty & \text{gdy } a = b = 0 \\ a^2 + b^2 & \text{w p.w.} \end{cases}$$

- PID $\subseteq$ Euklidesowe pierścienie

- R dziedzina $\Rightarrow$ $R[X]$ dziedzina

- $I \triangleleft R$ jest pierwszy, gdy

$$(\forall a, b \in R)(ab \in I \Rightarrow a \in I \lor b \in I)$$

$a \in R \setminus \{0\}$ pierwszy, gdy (a) pierwszy,

czyli a pierwszy gdy
$a \notin R^*$ oraz $\forall c, d \in R$.

$$a \mid cd \Rightarrow a \mid c \vee a \mid d.$$

- $I \trianglelefteq R$, wtedy

  I pierwszy $\Leftrightarrow R/I$ jest dziedziną.

- <u>Def</u> $I \triangleleft R$ maksymalny, gdy
  $\neg(\exists J \triangleleft R)(I \subsetneq J \subsetneq R)$.

  I maksymalny $\Leftrightarrow R/I$ ciało.

  $\Rightarrow I$ pierwszy

- R: PID, $I \triangleleft R$, wtedy I = maks.

- $I \triangleleft R \Rightarrow \exists J \triangleleft R$ taki, że $I \subseteq J$ oraz J maksymalny.

- rozkład $a = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, gdy $a_i \notin R^*$.

- <u>Def</u> $a \in R \setminus (\{0\} \cup R^*)$, a jest nierozkładalny, gdy nie ma właściwego rozkładu w R.

- a nierozkładalny $\iff \forall b, c \in R$

$$bc = a \implies b \in R^* \vee c \in R^*.$$

a pierwszy $\implies$ a nierozkładalny.

- a nierozkładalny i $a \sim b \implies$ b nierozkładalny.

- R: dziedzina noetherowska, wtedy każdy $a \in R \setminus (\{0\} \cup R^*)$ jest iloczynem elementów nierozkładalnych.

- <u>**Def**</u> R: dziedzina, wtedy R jest dziedziną z jedn. rozkł. (UFD) gdy:

(a) $\forall a \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ a jest i.e.n.

(b) $a = p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m \implies n = m,$

$$p_i \sim q_{\sigma(i)}, \quad \sigma \in S_n.$$

• **TW** R: dziedzina

(1) R: UFD
(2) $\forall a \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ a jest i.e.n. i każdy nierozkładalny element w R jest pierwszy.

• **Wn.** jeśli R: dziedzina noeth., w której każdy elem. nierozkładalny jest pierwszy, to R: UFD.

• **Wn.** R: PID $\Rightarrow$ R: UFD

• **Wn.** R: euklidesowy $\Rightarrow$ R: UFD

GENERALNIE:

rings $\supset$ dziedziny $\supset$ NWD dziedziny $\supset$ UFD $\supset$ $\supset$ PID $\supset$ Dziedziny euklidesowe $\supset$ ciała

Def. R: dziedzina,

(1) d jest NWD(a, b), gdy:
(i) $d | a \land d | b$ (ii) $d_1 | a \land d_1 | b \Rightarrow d_1 | d$

(2) a i b wzgl. pierwsze gdy
$\mathrm{NWD}(a, b) = 1$.

- Zał. że $a \sim a'$, $b \sim b'$, $d \sim d'$, wtedy d jest NWD(a,b) $\Leftrightarrow$ d' jest NWD(a',b')
- <u>TW.</u> Zał. że R: UFD, wtedy istnieje NWD.

$$a = p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{l_n}, \quad b = \underset{R^*}{\underset{\cap}{c}} \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n},$$

p_i nierozk.

Wtedy $d = p_1^{\min\{l_1, k_1\}} \ldots p_n^{\min\{l_n, k_n\}}$: NWD(a,b).

- R: PID, wtedy d: NWD(a,b) $\Leftrightarrow$ $(d) = (a,b)$.

- <u>Def</u> d: NWW(a,b) gdy
  (i) $a \mid d \wedge b \mid d$ (ii) $a \mid d_1 \wedge b \mid d_1 \Rightarrow d \mid d_1$

- <u>TW.</u> $a \cdot b \sim$ NWD$(a,b) \cdot$ NWW(a,b)
  ($a \neq 0$ lub $b \neq 0$)

- $\underset{\text{pierścień}}{R} \subseteq \underset{\text{ciało}}{K} \Rightarrow R$ to dziedzina.

$R_0 = \{ \frac{m}{n} : m, n \overset{\neq 0}{} \in R \}$: podciało K generowane przez R. $\frac{m}{n} = m \cdot n^{-1}$

- Ciało ułamków R:

$$R_0 = R \times (R \setminus \{0\}) / \sim$$, gdzie $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n$.

- $R \to R_0$ monomorfizm
  $n \mapsto \frac{n}{1}$

$$\underset{\text{ciało}}{K} \rightsquigarrow \underset{\text{dziedzina}}{K[X]} \rightsquigarrow \underset{\text{ciało ułamków}}{K[X]_0} = \underset{\text{ciało funkcji wymiernych}}{K(X)}$$

$$f(X) = \frac{W(X)}{V(X)}, \quad W, \underset{\neq 0}{V} \in K[X].$$

- $K((X)) = \{ \sum_{n=k}^{\infty} a_n X^n, k \in \mathbb{Z}, a_n \in K \}$.

ciało szeregów Laurenta (ułamków $K[[X]]$)

- Tw. (Gaussa)

$$R: \text{UFD} \Rightarrow R[X]: \text{UFD}$$

- Lemat Gaussa (R: UFD)

$f, g \in R[X]$, wtedy $c(f) \cdot c(g) = c(fg)$

$$c(f) = \text{NWD}(a_0, \dots, a_n)$$

zawartość f $\qquad f(X) = a_0 + \dots + a_n X^n$

- $c(f) = 1 \to f$ pierwotny
- Lemat (R: UFD)

$0 \neq f \in R[X] \setminus R[X]^*$, wtedy

f jest i.e.n.

- Lemat Gaussa (R: UFD)

$K = R_0$, $f \in R[X]$ nierozkładalny, $\deg f > 0$. Wtedy f nierozkładalny w $K[X] \supseteq R[X]$.

- KRYTERIUM EISENSTEINA

R: PID, $K = R_0$, $f(x) = \overset{\overset{0}{\neq}}{a_n} X^n + \ldots + a_0 \in R[X]$

$\underset{\underset{R}{\cap}}{p}$ nierozkładalne, $p | a_0, \ldots, p | a_{n-1}$, $p \nmid a_n$.

$p^2 \nmid a_0$.

Wtedy f nierozkładalny w $K[X]$.

Jeśli f pierwotny, to f nierozk. w R.

- R: PID, $R \to R'$ epi. Wtedy

R': PID

- R_1, R_2: PID $\Rightarrow R_1 \times R_2$: PID

- Skończone dziedzina jest ciałem. ✓
- R: UFD, wtedy $(a) \cap (b)$ jest IG.
- $R, R_1, f: R \longrightarrow R_1$ homo.

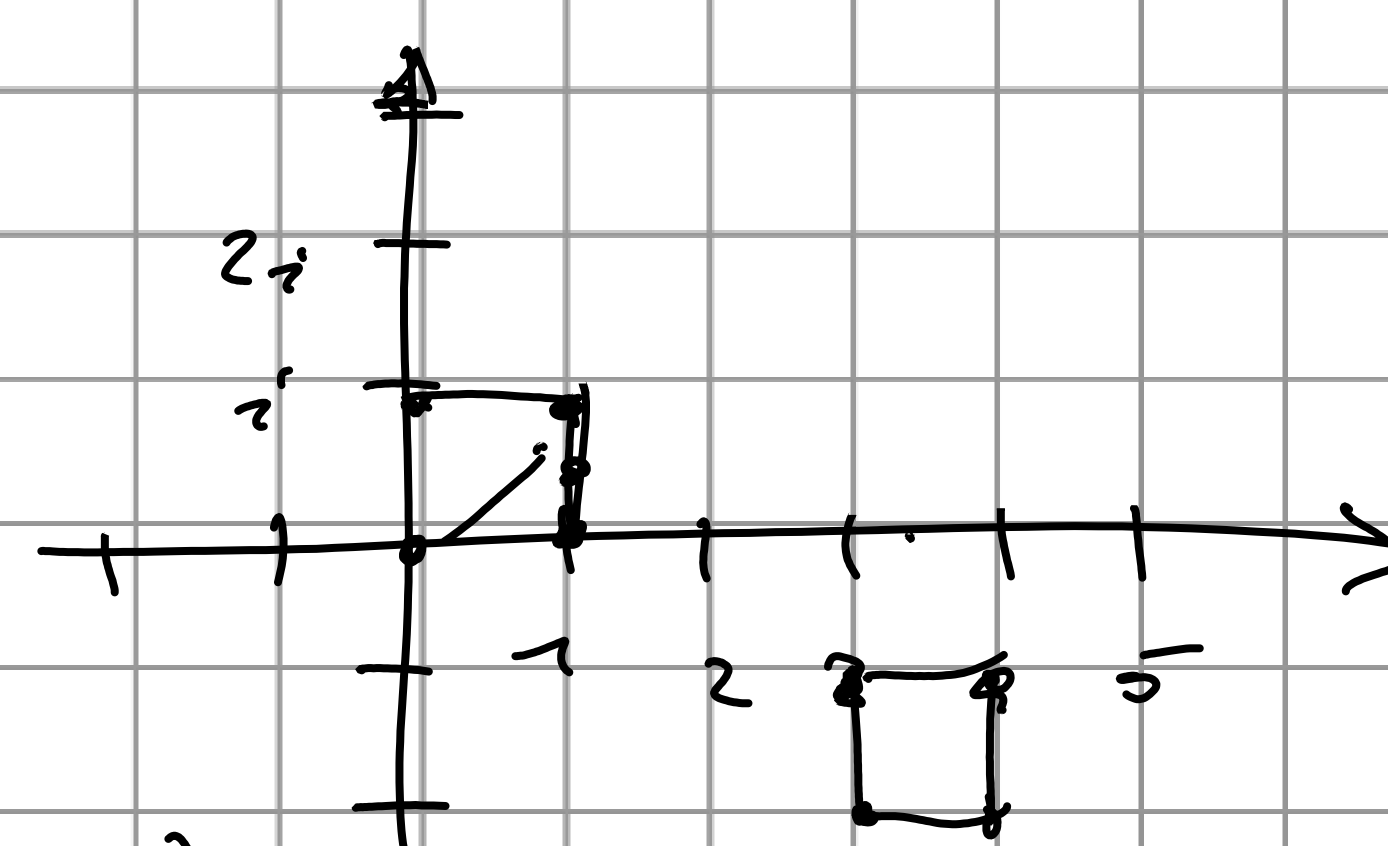
  R: noetherowski $\Rightarrow f[R]$ noeth.

$17+11i$, $3+4i$ szukamy ich NWD

(1) $\frac{17+11i}{3+4i} = \frac{(17+11i)\cdot(3-4i)}{25} =$

$= \frac{51+33i-68i+44}{25} = \frac{95-35i}{25} =$

$= \underset{\underset{4}{\wedge}}{\overset{\overset{3}{\wedge}}{\frac{19}{5}}} - \frac{7}{5}i$



$17+11i = (3+4i)\cdot(3-i) + R$

$17+11i = 9 - 3i + 12i + 4 + R$

$4+2i = r$

$3+4i$, $4+2i$

$\downarrow$

$\frac{3+4i}{4+2i} = \frac{(3+4i)(4-2i)}{20} = \frac{12-6i+16i+8}{20} =$

$= 1 + \frac{1}{2}i$

$3+4i = (4+2i)\cdot 1 + R$

$-1+2i = R$

$$\frac{4+2i}{-1+2i} = \frac{(4+2i)(-1-2i)}{5} = \frac{-4-8i-2i+4}{5} =$$

$$= 5i$$

$$\underline{-1+2i}$$

$$2 = (1+i)(1-i)$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$$

$$(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3}) = 1+3 = 4 = 2\cdot 2$$

$$(1+2i)(1-2i) = 5$$

rozkł.

$$(1+3i)(1-3i) = 10 = 2\cdot 5$$