Zad. 6

(a) a - l. przestępna nad F.

$W \in F[X]$, $\deg W = n > 0$,

W nierozkładalny w $F[X]$,

$W(\alpha) = 0$, $\alpha \in F_1 \supseteq F$.

$W(x) = w_0 + \ldots + w_n x^n$.

$$F[\alpha] := \{a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} : \bar{a} \subseteq F\}.$$

Wtedy $F[\alpha]$ – podciało F_1.

Należy pokazać, że dla $F[\alpha]$

$m \geqslant n$ $\quad \alpha^m = a_0 + a_1\alpha^1 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$.

Ale $\alpha^m = \alpha^m - \frac{1}{w_n}\alpha^{m-n} \cdot \underset{0}{\underset{\shortparallel}{W(\alpha)}} =$

$= \alpha^{m-1} + \ldots$. Przez prostą indukcję widać, że teza zachodzi dla wszystkich $m \geqslant n$.

To daje natychmiastowy wniosek o zamkniętości $F[\alpha]$ na mnożenie.

Niech $\overline{\Phi} : F[X] \longrightarrow F[\alpha]$

dane wzorem $\overline{\Phi}(f) = f(\alpha)$.

To jest homomorfizm pierścieni:

- $\overline{\Phi}(f+g) = \overline{\Phi}(f) + \overline{\Phi}(g)$ – trywialne
- $\overline{\Phi}(f \cdot g) = (f \cdot g)(\alpha) =$

  $f(\alpha) \cdot g(\alpha) = \overline{\Phi}(f) \cdot \overline{\Phi}(g)$

Ponadto w nierozkładalny,

$w \in \operatorname{Ker} \overline{\Phi} \Rightarrow (w) = \operatorname{Ker} \overline{\Phi}$ bo

$F[X]$ jest PID. Zatem

$$
\begin{tikzcd}
F[X] \arrow[rr, "\overline{\Phi}"] \arrow[dr, "j"'] & & F[\alpha] \\
& F[X]/(w) \arrow[ur, dashed, "\cong", "\overline{\Phi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(b) $B = \{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$. $\operatorname{lin} B = F[\alpha]$ z def.

Pokażemy, że B jest lnz.

$$a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = 0$$

Zał. nie wprost, że któryś ze wsp. jest różny od 0.

W takim razie wielomian

$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

spełnia $P(\alpha) = 0$, $n > \deg P > 0$.

Wtedy $\deg NWD(P, W) > 0$, bo $(x-\alpha) \mid NWD(P, W)$.

(nie ma znaczenia, że $x-\alpha$ nie jest z $F[X]$. $NWD(P,W)$ jest takie samo w $F[X]$ oraz $F_1[X]$, w $F_1[X]$ jest podzielne przez $(x-\alpha)$, więc ma dod. stopień).

↯