zad. 10

a) $\mathbb{Z}_n \cong \langle x \mid x^n = e \rangle$

<u>D-d</u>

$\mathcal{F}(x) = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$N = \mathcal{F}(\{x^n\}) = \{x^{kn} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$f : \mathcal{F}(x) \xrightarrow{epi} \mathbb{Z}_n \; : \; f(x^k) = k \bmod n$

Wtedy

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(x) \arrow[rr, two heads, "f"] \arrow[dr, "j"'] & & \mathbb{Z}_n \\ & \mathcal{F}(x)/N \arrow[ur, dashed, "\cong", "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

, bo $\ker f = N$

$\blacksquare$

b) $D_n \cong \langle r, s \mid r^n = s^2 = (rs)^2 = e \rangle$

Łatwo zauważyć, że r reprezentuje obrót, a s odbicie w D_n. Ponadto napisy r^n, s^2 oraz $(rs)^2$ faktycznie ewaluują się do id w D_n. Przyjmijmy $\mathcal{F} = \langle r, s \rangle$, jak na wykładzie, $D = \{r^n, s^2, (rs)^2\}$ oraz

$N = \langle \bigcup_{w \in \mathcal{F}} D^w \rangle$. Z def. elementy w N są postaci $w_1 r_1 w_1^{-1} w_2 r_2 w_2^{-1} \ldots w_m r_m w_m^{-1}$, gdzie $w_i \in \mathcal{F}$, $r_i \in D$, dla $i = 1, \ldots, m$.

Skoro napisy z D ewaluują się do id w D_n, to jasno widać, że N jest zbiorem tych napisów w $\mathcal{F}$, które w D_n ewaluują się do id.

Jeśli teraz weźmiemy naturalne $f: \mathcal{F} \xrightarrow{epi} D_n$
to z zas. tw. o homo. grup mamy

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & D_n \\
\mathcal{F}/N \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"', "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$