$$f(x) = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$$

$$\Phi(W(X)) = W(X+1)$$

$$\Phi(f(x)) = \Phi\left(\frac{X^p - 1}{X-1}\right) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} =$$

$$= X^{p-2} + \binom{p}{1} X^{p-3} + \ldots + \binom{p}{p-1} \in \mathbb{Z}[X]$$

Z kryterium Eisensteina $p \mid \binom{p}{k}$ $1 \leq k \leq p-1$

$p \nmid 1$. Zatem $\Phi(f)$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[X]$ o ile f nierozkładalny w $\mathbb{Z}[X]$

Zad. Dla p pierwszego pokazać, że wielomian $\Phi(X) = X^{p-1} + \ldots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ jest nierozkładalny.

Rozwiązanie:

Pokażemy najpierw, że Φ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[X]$.

Rozważmy izomorfizm pierścienia $\mathbb{Z}[X]$

$$\Psi(w(X)) = w(X+1).$$

Wtedy $\Psi(\Phi(X)) = \Phi(X+1) \overset{(*)}{=}$

$$= X^{p-1} + \binom{p}{1} X^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-2} X + \binom{p}{p-1}.$$

$c(\Psi(\Phi)) = 1$, zatem $\Psi(\Phi)$ jest nierozkładalny, a skoro Ψ jest izo., to Φ również jest nierozkładalny. Korzystając z kryterium Eisensteina i tego, że $\mathbb{Q}$ jest ciałem ułamków $\mathbb{Z}$, mamy naszą tezę.

$$(*) \quad X^{p-1} + \dots + 1 = \frac{X^p - 1}{X - 1}$$

$$\frac{(X+1)^p - 1}{(X+1) - 1} = \frac{X^p + \binom{p}{1} X^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1} \cancel{X}}{\cancel{X}} =$$

$$= X^{p-1} + \binom{p}{1} X^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1} .$$