Kolokwium 2, 16.12.2020, 10:15 – 11:20

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Wolno korzystać bez dowodu z wszystkich faktów podanych na wykładzie lub ćwiczeniach.

Zad. 1 (a) (2pkt). Grupa D_3 izometrii własnych trójkąta równobocznego ABC działa w sposób naturalny na tym trójkącie. Dla jakich k istnieje k-elementowa orbita tego działania? Dla każdego takiego k podać przykład takiej orbity.
(b) (3pkt) Podać przykład grupy abelowej rzędu 100, która nie jest cykliczna.
(c) (3pkt) Czy addytywna grupa liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +)$ zawiera podgrupę izomorficzną z grupą $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$?

Zad. 2 (a) (3pkt) Załóżmy, że p jest liczbą pierwszą, zaś G grupą skończoną. Udowodnić, że liczba elementów grupy G, które mają rząd p, jest podzielna przez $p - 1$.
(b) (3pkt) Udowodnić, że w grupie rozwiązalnej stopnia k jest przynajmniej $k + 1$ klas sprzężenia.

Zad. 3 (a) (3pkt) Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o wyrazach całkowitych, taka że $\det(A) = 1$. Udowodnić, że elementy $g = (a, c)$ i $h = (b, d)$ tworzą bazę wolnej grupy abelowej $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$.
(b) (3pkt) Wyznaczyć grupę automorfizmów wewnętrznych grupy D_4. Wyznaczyć jej strukturę algebraiczną.