Zad. 2

(b) $\mathbb{Z}_{210}$ jest PID.

Każdy $I \triangleleft \mathbb{Z}_{210}$ jest skończenie generowany oraz $(a_1, \dots, a_n) = (NWD(a_1, \dots, a_n))$.

Zatem $|\{I : I \triangleleft \mathbb{Z}_{210}\}| = d(210) = 16$

l. podzielników 210

(a)

Niech $I \triangleleft R_1 \times R_2$.

Niech $J_1 = \{a \in R_1 : (a,b) \in I$ dla pewnego $b \in R_2\}$

Podobnie $J_2 = \{b \in R_2 : (a,b) \in I$ dla pewnego $a \in R_1\}$.

Wtedy $J_1 \triangleleft R_1$ oraz $J_2 \triangleleft R_2$.

Weźmy $a_1, a_2 \in J_1$. Wtedy są takie $b_1, b_2$ że $(a_1, b_1) \in I$ oraz $(a_2, b_2) \in I$.

$I$ to ideał więc $(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in I$, a zatem $a_1 + a_2 \in I$. Wtedy biorąc dowolny $r \in R_1$ mamy $(r, 0) \cdot (a_1, b_1) = (ra_1, 0) \in I$.

Zatem $ra_1 \in J_1$ dla dowolnych $r \in R$, $a_1 \in J_1$. Więc $J_1 \triangleleft R_1$.

Analogicznie pokazujemy $J_2 \triangleleft R_2$.

Pokażemy, że $J_1 \times J_2 = I$.

Zawieranie $I \subseteq J_1 \times J_2$ jest oczywiste.

Teraz weźmy $(a, b) \in J_1 \times J_2$.

Istnieje $b'$ t.że $(a, b') \in I$

oraz $a'$ t.że $(a', b) \in I$.

Zatem $(1_{R_1}, 0) \cdot (a, b') +$ $\in I$

$$+ (0, 1_{R_2}) \cdot (a', b) =$$

$$= (a, b) \in I.$$

Zatem $J_1 \times J_2 = I$. ∎

Zad. 1 (b)

Zał. nie wprost, że $k = \text{ord}(1) < n := |R|$.

Wtedy, jeśli $g$ generuje $R$, to mamy

$$0 = (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k}) \cdot g = g + \ldots + g \neq 0$$

$\cancel{\phi}$ ↯

(a) Na razie w $\mathbb{Q}$:

$$\frac{m}{2^n} \cdot q = 1 \Rightarrow \frac{m}{2^n} = \frac{1}{q} \Rightarrow m = \frac{2^n}{q} \in \mathbb{Z}$$

Czyli $q = \pm 2^k$, $k \in (-\infty, n]$

Czyli $R^* = \{ 2^k, k \in \mathbb{Z} \}$.

$R^*$ jest cykliczna: $\langle 2 \rangle = (R^*, \cdot)$.

$$\cong (\mathbb{Z}, +)$$

nie jest produktem grup cyklicznych, więc $R^*$ też nie

Zad. 3

$$W(x) = x^{2021} + ax^{2020} + b$$

$$x^{2021} + ax^{2020} + b = Q(x)\cdot(x^2 + x + 1)$$

$$x^{2019} + (a-1)x^{2018} - ax^{2017}$$

$$x^{2021} + ax^{2020} + b \quad : \quad x^2 + x + 1$$

$$-\ x^{2021} + x^{2020} + x^{2019}$$

$$(a-1)x^{2020} - x^{2019} + b$$

$$-\ (a-1)x^{2020} + (a-1)x^{2019} + (a-1)x^{2018}$$

$$-ax^{2019} - (a-1)x^{2018} + b$$

$$-ax^{2019} - ax^{2018} - ax^{2017}$$

$$x^{2018} + ax^{2017} + b$$

Tu mógł by równie dobrze pomnożyć prze: a+b...

$$\vdots$$

$$x^{2015} + ax^{2014} + b$$

$$\vdots$$

$$x^2 + ax + b$$

$$x^2 + x + 1$$

$$(a-1)x + b - 1 = 0$$

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$$

~~$\mathbb{Z}_7[X]$ jest euklidesowy, bo $\mathbb{Z}_7$ jest ciałem.~~

$$W(X) = X^{2021} + aX^{2020} + 6 \equiv$$

$$\equiv X^5 + aX^4 + 6 \quad (\text{MTF})$$

Znajdźmy pierwiastki $X^2 + X + \underline{1}$.

$$X^2 + X + 1 = 0$$

$1 \cdot 1 = 1$
$2 \cdot 2 = 4$
$3 \cdot 3 = 2$
$4 \cdot 4 = 2$
$5 \cdot 5 = 4$
$6 \cdot 6 = 1$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = 2 \text{ albo } 5$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = (-1 \pm \sqrt{\Delta}) \cdot 4 =$$

1° $(-1+2) \cdot 4 = 4$ 2° $(-1-2) \cdot 4 = -12 = -5 = 2$

3° $(-1+5) \cdot 4 = 16 = 2$ 4° $(-1-5) \cdot 4 = -24 = 4$

Czyli zerami $X^2 + X + 1$ są $4$ i $2$.
Więc to są też zera $X^5 + aX^4 + 6$

$$\begin{cases} 4^5 + a4^4 + 6 = 0 \\ 2^5 + a2^4 + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + a \cdot 4 + 6 = 0 \\ 4 + 2a + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 4a + b = 0 \\ 4 + 2a + b = 0 \end{cases}$$

$-2 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$

$b = 1$

$\underline{a = b = 1}$