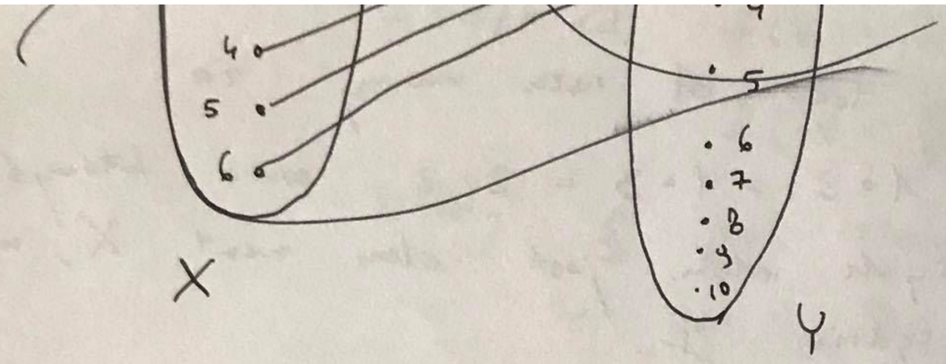


Zad. 1

~~a) Nie ma takiego działania homomorfizmu – mamy dwie opcje – albo 1, albo 2 jest elem. neut. w Y, zatem $\ker f = \{1, 2\}$ lub $\ker f = \{3, 4, 5, 6\}$.~~

a) ① f możemy myśleć jak o epimorfizmie na podgrupę Y, zatem $f^{-1}[\{1\}]$ oraz $f^{-1}[\{2\}]$ to włókna f i jednocześnie warstwy $\ker f$. Ale warstwy muszą być równoliczne, ~~stąd~~ a

$$|f^{-1}[\{1\}]| \neq f^{-1}[\{2\}],$$

więc takiego homomorfizmu nie ma.

c) Nie ma takiego, bo musiałoby zachodzić $f[X] < Y$, ale $|f[X]| \nmid |Y|$, a wiemy że rząd podgrupy musi dzielić rząd grupy.

b) Niech $*$ t.że $(Y, *) \cong D_5$. Pokażemy że jest takie $\circ$ oraz f że

$$f(1) = f(2) = f(3) = id \in D_5$$
$$f(4) = f(5) = f(6) = S_1 \in D_5$$

Z tego od razu mamy że

$$1 \circ 2 = 1 \circ 3 = 2 \circ 3$$

oraz któryś z tych elem. jest elem. neut. X, niech to będzie 1.

$$\cancel{f(2 \circ 4) = f(2 \circ 5) = f(2 \circ 6) = S_1}$$
$$\cancel{f(3 \circ 4) = f(3 \circ 5) = f(3 \circ 6) = S_1}$$
$$\cancel{f(4 \circ 4) = f(5 \circ 5) = f(6 \circ 6) = id}$$

Zmieńmy trochę zapis:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cong \{\overset{1}{0_0}, \overset{2}{0_1}, \overset{3}{0_2}, \overset{4}{1_0}, \overset{5}{1_1}, \overset{6}{1_2}\}$$

Niech teraz $a_i \,\bar{\circ}\, b_j = (a +_2 b)_{i +_3 j}$

Wtedy $(X, \circ) \xrightarrow{f} D_5 \cong (Y, *)$ dla pewnego $*$.

dane przez $\bar{\circ}$

Zad. 2

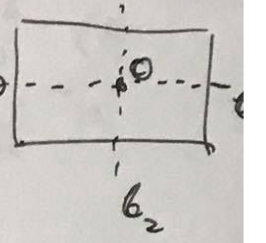
$D_{100} = \{ id, R_1, \dots, R_{\cancel{100}\,99}, S_1, \dots, S_{100} \}$

a) TAK $K_4 = \{ e, a, b, c \}$

odb. wzgl. l_2

wzgl. O

odbicie względem l_1



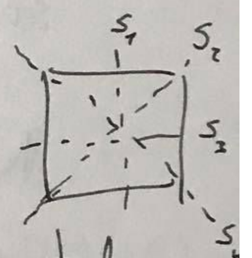
$f : K_4 \xrightarrow{\cong} D_{100}$

$f(e) = id, \quad f(a) = S_{50}, \quad f(b) = S_1,$

$f(c) = R_{50}$

Wtedy f jest izomorfizmem z K_4 w $\{ id, S_{50}, R_{50}, S_1 \} < D_{100}$.

b) $D_4 = \{ id, S_1, S_2, S_3, S_4, \underset{90^\circ}{R_1}, \underset{180^\circ}{R_2}, \underset{270^\circ}{R_3} \}$



~~$|D_4| \nmid |D_{100}|$ Nie ma takiego izomorfizmu.~~

~~Zał. że jest, wtedy~~ Nie ma takiego izomorfizmu

~~$f(S_1) = f(S_4 \circ R_1) = f(S_4) * f(R_1)$~~

~~$f(id) = id$~~

~~$f(S_1) = S_1$~~

~~$f(S_2) = S_{25}$~~

~~$f(S$~~

zad. 3

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4\ 5)$

Z zad. 7 z listy 3 wiemy, że J sprzężone z σ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego k cykli długości k w J jest tyle co w σ.

Stąd J możemy wybrać na $\binom{5}{2} \cdot 2 = 20$ sposobów:

wybieramy które liczby będą w cyklu dwuelementowym i cykl trzyelementowy z pozostałych liczb możemy ułożyć na 2 sposoby

Stąd $|\sigma^{S_5}| = 20$.

Nie ma takiego $x \in S_5$, że $x^3 = \sigma$.

Gdyby był taki x, to jego rozkład na cykle musiałby być taki że ma jeden cykl dł. 2 (gdyby miał cykl dł. 4 to x^3 miałby 2 cykle dł. 2, gdyby miał cykl dł. 5 to x^3 nie miałby cyklu dł. 2), no więc x musi mieć cykl dł. 3 lub coś innego, ale tu już jasno widać że x^3 nie ma cyklu długości 3.

b) $5 \nmid |G|$, $\text{ord}(a)=3$ $ab = b^6 a$ $a \neq e \neq b$

$$\Downarrow$$

$$b = a^{-1} b^6 a \, , \quad aba^{-1} = b^6$$

$$\Downarrow$$

$$aba^{-1} = b^6 = a^{-1} b^{36} a$$

$$\Downarrow$$

$$b = b^{36}$$

Zatem $b^{35} = e$ a stąd $\mathrm{ord}(b) \mid 35$.

Ale $5 \nmid |G|$, z ~~zatem 5∤~~ oraz $\mathrm{ord}(b) \mid |G|$,

stąd $5 \nmid \mathrm{ord}(b)$, więc $\mathrm{ord}(b) \mid 7$.

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{ord}(b) = 1 \quad \vee \quad \underline{\underline{\mathrm{ord}(b) = 7}}$$

$$\Downarrow$$

$$b = e$$

$$\lightning$$

Zatem $\mathrm{ord}(b) = 7$.