# Zadanie domowe 2

Franciszek Malinka

9 czerwca 2020

**Zadanie 1.** *Niech* $(X_1, \rho_1)$ *i* $(X_2, \rho_2)$ *będą przestrzeniami metrycznymi. Jednostajną ciągłość funkcji* $f\colon X_1 \to X_2$ *definiujemy przez warunek*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X_1)(\rho_1(x, y) < \delta \implies \rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

*Taka funkcja spełnia warunek Lipschitza jeżeli istnieje stała Lipschitza* $L > 0$*, taka że dla dowolnych* $x, y \in X_1$ *zachodzi nierówność*

$$\rho_2(f(x), f(y)) \leq L \cdot \rho_1(x, y).$$

*Pokazać, że warunek Lipschitza implikuje jednostajną ciągłość, a jednostajna ciągłość pociąga za sobą ciągłość, ale implikacje przeciwne nie muszą zachodzić (podać kontrprzykład).*

**Rozwiązanie.** Weźmy dowolne przestrzenie metryczne $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$ oraz funkcję $f\colon X_1 \to X_2$ spełniającą warunek Lipschitza i niech $L$ będzie stałą Lipschitza dla funkcji $f$. Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$. Niech $\delta = \varepsilon/L$. Wtedy dla dowolnych $x, y \in X_1$ zachodzi

$$\rho_1(x, y) < \delta \implies \rho_2(f(x), f(y)) \leq L \cdot \rho_1(x, y) < L \cdot \delta = \varepsilon.$$

Zatem warunek Lipschitza pociąga za sobą jednostajną ciągłość. □

Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa – weźmy $X_1 = X_2 = \mathbf{R}$ ze standardową metryką euklidesową oraz niech $f(x) = \sqrt{|x|}$. Funkcja ta jest jednostajnie ciągła: weźmy dowolny $\varepsilon > 0$ oraz ustalmy $\delta = \varepsilon^2$. Wtedy dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ takich, że $|x - y| < \delta$ zachodzi

$$|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^2 \leq |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \cdot |\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}| = |x - y| < \varepsilon^2.$$

Załóżmy teraz nie wprost, że $f$ spełnia warunek Lipschitza dla stałej $L > 0$. Weźmy zatem $x = \frac{1}{2L^2}, y = 0$, wtedy

$$x - L^2x^2 = x(1 - L^2x) = x(1 - \frac{1}{2}) > 0 \iff \sqrt{x} > Lx.$$

Zatem nie ma takiego $L$ które spełniałoby warunek dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}$. □

Należy jeszcze pokazać, że funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła. Weźmy dowolne przestrzenie metryczne $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$ oraz funkcję $f\colon X_1 \to X_2$ jednostajnie ciągłą. Weźmy dowolny punkt $x \in X$ oraz dowolną kulę $B_Y(f(x), r)$ w $(Y, \rho_2)$. Z jednostajnej ciągłości możemy wybrać $\delta$ taką, że dla dowolnego $x' \in X$ zachodzi $\rho_1(x, x') < \delta \implies \rho_2(f(x), f(x')) < r$. W takim razie dla każdego punkt $x' \in B_X(x, \delta)$ mamy $f(x') \in B_Y(f(x), r)$, stąd dostajemy $f[B_X(x, \delta)] \subset B_Y(f(x), r)$.

Skoro dowolne otwarte otoczenie $U$ punktu $f(x)$ jest sumą kul w $(Y, \rho_2)$, to dla każdej z tych kul możemy znaleźć odpowiednią kulę w $(X, \rho_1)$, suma tych kul będzie wtedy otoczeniem $x$, a ich obraz będzie zawarty w $U$, co jest równoważne ciągłości $f$. □

Na koniec pokażemy, że implikacja odwrotna nie zachodzi. Weźmy funkcję $f(x) = x^2$. Jest oczywiście ciągła. Weźmy $\varepsilon = 1$ oraz dowolną $\delta > 0$. Niech $x = 1/\delta, y = x + \delta/2$. Wtedy $|x - y| = \delta/2 < \delta$, ale

$$|x^2 - y^2| = 1 + \delta^2/4 > 1 = \varepsilon.$$

Zatem $f$ nie jest jednostajnie ciągła.

**Zadanie 2.** *Przestrzeń $X$ nazywamy lokalnie zwartą, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje taki otwarty $x \in U \subseteq X$ taki, że $\bar{U}$ jest zwarty.*

*(a) Pokazać, że zarówno otwarte, jak i domknięte podprzestrzenie lokalnie zwartej przestrzeni Hausdorffa są lokalnie zwarte.*

*(b) Czy $\mathbf{R}^n, n = 1, 2, ...$ z metryką euklidesową jest lokalnie zwarta?*

*(c) Czy zbiór liczb wymiernych z metryką euklidesową jest lokalnie zwarty?*

**Rozwiązanie.** Żeby pokazać pierwszy punkt udowodnimy najpierw następujący lemat:

**Lemat.** *Lokalnie zwarta przestrzeń Hausdorffa jest regularna.*

*Dowód.* Wiemy, że zwarta przestrzeń Hausdorffa jest normalna (co za tym idzie – regularna, tylko to nam się przyda). Weźmy jakąś lokalnie zwartą przestrzeń $(X, \mathcal{T})$, jej domknięty podzbiór F oraz dowolny punkt $x \in X \setminus F$. Z założenia możemy wybrać otwarty podzbiór $x \in W \subset X$, że $\overline{W}$ zwarty. Spójrzmy na podprzestrzeń indukowaną przez $\overline{W}$, oznaczmy ją $\mathcal{T}_W$. Z jej własności wiemy, że $F \cap \overline{W}$ jest w niej domknięty, zatem z regularności $\overline{W}$ możemy wybrać rozłączne otwarte podzbiory $U_W, V_W \in \mathcal{T}_W$, że $x \in U_W$ oraz $(F \cap \overline{W}) \subset V_W$. Nietrudno zauważyć, że $\overline{U_W} \cap F = \emptyset$ oraz że $\overline{U_W}$ domknięty również w $X$.

Zauważmy, że $U_W = U \cap \overline{W}$ z definicji topologii indukowanej dla pewnego $U$ otwartego w $X$. Stąd też widać, że $x \in U$ oraz że $(U \cap W) \cap F \subseteq (U \cap \overline{W}) \cap F = U_W \cap F = \emptyset$. Założyliśmy, że $W$ otwarte, więc $U \cap W$ jest otwartym otoczeniem $x$ rozłącznym z $F$. Dodatkowo $U \cap W \subseteq \overline{U_W}$, stąd zbiory otwarte $U \cap W$ oraz $X \setminus \overline{U_W}$ są rozłącznymi otoczeniami kolejno $x$ oraz $F$. □

(a) Przejdźmy do rozwiązania pierwszej częsci zadania, czyli że otwarte podzbiory lokalnie zwartej przestrzeni Hausdorffa są lokalnie zwarte. Weźmy dowolną przestrzeń Hausdorffa lokalnie zwartą $(X, \mathcal{T})$. Wybierzmy jakiś $U \in \mathcal{T}$ i indukowaną przez niego topologię $\mathcal{T}_U$. Ustalmy punkt $x \in U$. Chcemy znaleźć jakieś jego otoczenie, którego domknięcie jest zwarte. Z założenia zadania możemy wybrać $x \in W \subset X$, że $\overline{W}$ zwarta. Z naszego lematu $X$ jest regularny, w takim razie z zadania 4 z listy 5 wiemy, że istnieje otwarty $x \in V \subset X$, że $\overline{V} \subset U$. Stąd $\overline{W \cap V} \cap U = \overline{W \cap V}$, więc $\overline{W \cap V}$ jest domkniętym zbiorem w $U$. Z drugiej strony $\overline{W \cap V}$ jest domkniętym podzbiorem zwartego $\overline{W}$, więc też jest zwarte. Znaleźliśmy zatem otoczenie $x \in W \cap V \subseteq U$, którego domknięcie jest zwarte, zatem $U$ jest lokalnie zwarte. □

Weźmy teraz dowolny domknięty podzbiór $F \subseteq X$ oraz topologię indukowaną przez niego $\mathcal{T}_F$. Ustalmy $x \in F$. Z założenia możemy wybrać takie $x \in W \subset X$, że $\overline{W}$ jest zwarty. Z drugiej strony $\overline{W} \cap F$ jest domknięty w przestrzeni $F$ ale zwarty, bo to domknięty podzbiór przestrzeni zwartej $\overline{W}$, zatem $\overline{W} \cap F$ jest zwarty i zawiera $x$ oraz $\mathrm{cl}_F(W \cap F) = \overline{W} \cap F$, zatem $W \cap F$ jest otwartym otoczeniem $x$ w zbiorze $F$, stąd $F$ jest lokalnie zwarty. □

(b) $\mathbf{R}^n$ jest lokalnie zwarta. Z wniosku 2.1.14 w skrypcie wiemy, że podzbiór $\mathbf{R}^n$ jest zwarty tylko wtedy, gdy jest ograniczony i domknięty. Weźmy zatem dowolny punkt $x = (x_1, ..., x_n)$. Wtedy $\overline{B(x, 1)}$ jest ograniczonym zbiorem domkniętym, zatem jest zwarty.

(c) Z drugiej strony $\mathbf{Q}$ nie jest lokalnie zwarta ponieważ nie zawiera takiego otwartego zbioru, że jego domknięcie jest zwarte. Natychmiast wynika to z tego, że w liczbach wymiernych są ciągi, które nie mają podciągów zbieżnych do liczb wymiernych. Jeśli takie wyjaśnienie nie jest wystarczające, to tutaj przytaczam szczegółowy sposób szukania takich ciągów dla dowolnego otwartego zbioru.

Weźmy dowolny $W \subseteq \mathbf{Q}$ otwarty. $W$ jest sumą kul, zatem wybierzmy sobie jakąś kulę $B(x, r) \subseteq W$ i bez straty ogólności załóżmy, że $r$ jest wymierne (jeśli jest niewymierne to możemy wybrać jakąś wymierną liczbę mniejszą od $r$ i większą od 0, kula o takim promieniu będzie zawarta w $B(x, r)$). Na chwilę zapomnijmy że jesteśmy w liczbach wymiernych. Weźmy jakąś liczbę $q \in \mathbf{Q}$ taką, że $0 < q < \frac{r}{e}$. Wtedy $x + q \cdot e$ jest liczbą niewymierną oraz zawiera się w przedziale $(x, x + r)$. Ciąg $a_n = x + q \cdot (1 + \frac{1}{n})^n$ jest wymierny, większy od $x$ ale mniejszy od $x + r$, bo w liczbach rzeczywistch $(1 + \frac{1}{n})^n$ zbiega do $e$ od dołu. Wskazaliśmy zatem ciąg zawarty w $B(x, r) \subseteq W$ który nie ma zbieżnych podciągów w zbiorze liczb wymiernych (wszysktkie zbiegają do $x + qe$), zatem zbiór $\overline{W}$ nie jest zwarty (tw. 2.1.4 (ii) ze skryptu).

**Zadanie 3.** *Niech $Y$ będzie zbiorem niepustym i niech $\infty$ będzie punktem nienależącym do $Y$. Rozważmy przestrzeń $X = Y \cup \{\infty\}$ z jednym punktem skupienia: deklarujemy, że każdy zbiór $A \subseteq Y$ jest otwarty, natomiast zbiory otwarte zawierające $\infty$ są postaci $\{\infty\} \cup (Y \setminus I)$, gdzie $I \subseteq Y$ jest skończony.*

*(a) Sprawdzić, że faktycznie zdefiniowaliśmy topologię na $X$.*

*(b) Ustalić, kiedy ta topologia ma bazę przeliczalną i kiedy jest ośrodkowa.*

*(c) Podać wzory na domknięcie i wnętrze dowolnego zbioru $A \subseteq X$.*

*(d) Wykazać, że $X$ jest przestrzenią normalną.*

**Rozwiązanie.** Oznaczmy zdefiniowaną w zadaniu topologię na $X$ przez $\mathcal{T}$. Faktycznie, jest to topologia, gdyż:

1. $\emptyset \subseteq X \implies \emptyset \in \mathcal{T}$ oraz $X = \{\infty\} \cup (Y \setminus \emptyset) \implies X \in \mathcal{T}$,

2. Weźmy ciąg $U_1, U_2, \ldots, U_n$ zbiorów z $\mathcal{T}$. Jeśli $\infty \in U_i$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$, to $V = \bigcap_{i=1}^n U_i = \{\infty\} \cup \bigcap_{i=1}^n (Y \setminus I_i) = \{\infty\} \cup (Y \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i)$ dla pewnych zbiorów skończonych $I_1, \ldots, I_n$, zatem $V = \{\infty\} \cup (Y \setminus I)$ dla skończonego $I = \bigcup_{i=1}^n I_i$, zatem $V \in \mathcal{T}$. Jeśli jest chociaż jedno takie $i$, że $\infty \notin U_i$, to $\infty \notin \bigcap_{i=1}^n U_i = V$, a zatem $V \subseteq Y$, więc $V \in \mathcal{T}$.

3. Weźmy dowolną rodzinę $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. Jeśli $\infty$ nie należy do żadnego zbioru z $\mathcal{U}$, to suma tej rodziny zawiera się w $Y$, więc jest w zdefiniowanej przez nas topologii. W p.w. jest taki $\infty \in U \in \mathcal{U}$, ale w takim razie $U$ nie ma jedynie skończenie wielu elementów z $Y$, więc tym bardziej suma $\mathcal{U}$ nie ma jedynie skończenie wielu elementów z $Y$ oraz zawiera $\infty$, więc $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$

Rozwiążemy najpierw $(c)$. Weźmy dowolny zbiór $V \subseteq X$. Pokażemy najpierw wzory na domknięcie. Rozważmy kilka przypadków:

- $\infty \in V$. Wtedy $\overline{V} = V$. Faktycznie, weźmy dowolny element $x \notin V$. Z założenia $x \neq \infty$, więc zbiór $U = \{x\}$ jest otwarty, więc jest otoczeniem $x$ które ma puste przecięcie z $V$, zatem $x \notin \overline{V}$, a stąd $\overline{V} = V$.

- $\infty \notin V$ oraz $V$ skończony. Wtedy również $\overline{V} = V$. Z tego samego argumentu co poprzednio, jeśli $x$ różny od $\infty$ oraz nie jest w $V$, to $\{x\}$ jest otwartym otoczeniem $x$ nieprzecinającym $V$. Z drugiej strony zbiór $\{\infty\} \cup (Y \setminus V)$ jest otoczeniem $\infty$ które kroi się pusto z $V$, więc ono też nie należy do $V$. Stąd $\overline{V} = V$.

- W przeciwnym przypadku $V$ jest nieskończone oraz $\infty \notin V$. Wtedy $\overline{V} = V \cup \{\infty\}$: dowolne otoczenie $\infty$ ma niepuste przecięcie z $V$, a dowolny inny punkt $x \neq \infty$ z tego samego argumentu co w poprzednich punktach nie należy do $\overline{V}$.

Wzory na wnętrze są prostsze: jeśli $V \in \mathcal{T}$ to oczywiście $\operatorname{Int} V = V$. W p.w. przypadku $\infty \in V$ oraz nie ma takiego skończonego $I$, że $(Y \setminus I) \subseteq V$. Wtedy $\operatorname{Int} V = V \setminus \{\infty\}$. Nie ma takiego otoczenia $\infty$ które byłoby zawarte w $V$, a z drugiej strony $V \setminus \{\infty\}$ jest otwarty.

Przejdźmy teraz do rozwiązania $(b)$. Ze wzorów na domknięcie natychmiast wynika, że nasza przestrzeń jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest $X$ jest przeliczalny. Implikacja w lewą stronę jest trywialna, natomiast w drugą musimy jedynie zauważyć, że domknięcie dowolnego zbioru doda do niego co najwyżej jeden element, więc nie znajdziemy takiego przeliczalnego podzbioru $X$, żeby jego domknięcie było nagle nieprzeliczalne.

Podobny warunek zachodzi dla przeliczalności bazy, tj. nasza przestrzeń ma przeliczalną bazę tylko wtedy, kiedy $X$ jest przeliczalny. To wynika natychmiast z faktu, że podprzestrzeń indukowana przez zbiór $Y$ jest dyskretna, a jej najmniejszą bazą jest zbiór $\mathcal{B} = \{\{y\} \colon y \in Y\}$ który ma moc równą mocy $Y$ (weźmy jakąś inną bazę $\mathcal{B}'$ przestrzeni dyskretnej $Y$, wtedy elementy $\mathcal{B}$ muszą być jakąś sumą elementów $\mathcal{B}'$, ale w $\mathcal{B}$ są jedynie singletony, więc $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$). Jeśli $Y$ przeliczalne, to

$$\mathcal{B} = \{\{x\} \colon x \in Y\} \cup \{\{\infty\} \cup (Y \setminus I) \colon I \text{ skończony zbiór zawarty w } Y\}$$

jest przeliczalną bazą $\mathcal{T}$.

Rozwiążmy teraz podpunkt $(d)$. Weźmy dwa dowolne rozłączne zbiory $F, G$ domknięte. Jeśli $\infty$ nie należy do żadnego z nich, to te zbiory są jednocześnie otwarte. Załóżmy teraz, że $\infty \in F$. Skoro $G$ domknięty, to $(Y \setminus G)$ jest otwarty oraz $\infty \in (Y \setminus G)$, a zatem $G$ musi być skończony. $G$ jest oczywiście jednocześnie otwarty, a otwarty zbiór $(Y \setminus G)$ musi zawierać $F$. Zatem nasza przestrzeń jest normalna.

**Zadanie 4.** *Niech $(X,d)$ będzie przestrzenią metryczną zupełną, $f\colon Y \to \mathbf{R}$ funkcją określoną na podprzestrzeni $Y \subseteq X$ i $d_f(x,y) = d(x,y) + |f(x) - f(y)|$. Pokazać, że przestrzeń metryczna $(Y, d_f)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy wykres $f$ jest domknięty w iloczynie kartezjańskim $X \times \mathbf{R}$ przestrzeni $X$ i prostej euklidesowej.*

**Rozwiązanie.** W rozwiązaniu pozwalamy sobie pomijać tę uwagę, ale z tyłu głowy pamiętamy, że metryki przyjmują tylko nieujemne wartości. Metrykę iloczynu przestrzeni metrycznych używamy standardowej, takiej jak w skrypcie.

Aby udowodnić tezę zadania, pokażemy implikacje w dwie strony:

- "$\Rightarrow$" Weźmy dowolny ciąg zbieżny $(y_n, f(y_n))$ punktów z wykresu. Powiedzmy, że ten ciąg zbiega do $(x,r) \in X \times \mathbf{R}$. Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$ oraz ustalmy odpowiednie $n_0$ takie, że dla dowolnych $n, m > n_0$ zachodzi

  $$\max\{d(y_n,x), |f(y_n) - r|\} < \varepsilon/4 \text{ oraz } \max\{d(y_n,y_m), |f(y_n) - f(y_m)|\} < \varepsilon/4$$

  (możemy wybrać takie $n_0$ ze względu na założenia o zupełności $X$; wiemy też, że iloczyn dwóch metrycznych przestrzeni zupełnych jest zupełny). Zauważmy, że z drugiego warunku ciąg $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ jest cauchy'ego w $(Y, d_f)$. Faktycznie, z własności funkcji max musi być tak, że którykolwiek z wyrazów jest mniejszy od $\varepsilon/4$. Sumując nierówności stronami następuje

  $$\varepsilon/2 > d(y_n, y_m) + |f(y_n) - f(y_m)| = d_f(y_n, y_n).$$

  Z założenia o zupełności $Y$ wiemy, że ten ciąg musi do czegoś zbiegać (w metryce $d_f$), niech zbiega zatem do pewnego $y \in Y$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $n_0$ było wybrane tak, że dla $n > n_0$ zachodzi

  $$d_f(y_n, y) = d(y_n, y) + |f(y_n) - f(y)| < \varepsilon/2.$$

  Wtedy korzystając z nierówności trójkąta i sumując odpowiednie nierówności stronami dostajemy, że

  $$d(x,y) \leq d(x,y_n) + d(y_n,y) \leq \underbrace{d(x,y_n)}_{<\varepsilon/4} + \underbrace{d(y_n,y) + |f(y_n) - f(y)|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$$

  $$|f(y) - r| \leq |f(y) - f(y_n)| + |f(y_n) - r| \leq \underbrace{d(y,y_n) + |f(y) - f(y_n)|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|f(y_n) - r|}_{<\varepsilon/4} < \varepsilon$$

  Skoro $\varepsilon$ może być dowolnie mały, to $d(y,x) = 0, |f(y) - r| = 0$, więc z aksjomatów metryki dostajemy $x = y, r = f(y)$. Okazuje się zatem, że dowolny zbieżny ciąg punktów z wykresu $f$ zbiega do jakiegoś punktu na tym wykresie, więc $Gr(f)$ jest domknięty w $X \times \mathbf{R}$. □

- "$\Leftarrow$" Weźmy dowolny ciąg cauchy'ego $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni $(Y, d_f)$. Wybierzmy $\varepsilon > 0$. Wtedy jest takie $n_0$, że dla dowolnych $n, m > n_0$ zachodzi

  $$d_f(y_n, y_m) = d(y_n, y_m) + |f(y_n) - f(y_m)| < \varepsilon/2.$$

  Z tego wynika, że $d(y_n, y_m) < \varepsilon/2, |f(y_n) - f(y_m)| < \varepsilon/2$, więc ciąg $y_n$ jest cauchy'ego w $X$, a ciąg $f(y_n)$ w $\mathbf{R}$. Obie te przestrzenie są zupełne, więc jest taki $y$ oraz taki $r$, że $y_n \to y$, $f(y_n) \to r$. Z własności iloczynu przestrzeni metrycznych dostajemy, że $(y_n, f(y_n)) \to (y, r)$, ale to jest ciąg punktów z wykresu który wg założeń jest domknięty, więc musi zachodzić $y \in Y, r = f(y)$. Stąd wnioskujemy, że dla pewnego $n_1$ i wszystkich $n > n_1$ zachodzi

  $$d(y_n, y) < \varepsilon/2 \wedge |f(y_n) - f(y)| < \varepsilon/2 \implies d_f(y_n, y) < \varepsilon.$$

  Z dowolności wyboru $\varepsilon$ dostajemy $y_n \to y$ w przestrzeni $(Y, d_f)$, a z dowolności wyboru $y_n$ każdy ciąg Cauchy'ego w $Y$ jest zbieżny, więc $Y$ jest zupełna. □

**Zadanie 5.** *Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią zwartą metryczną i niech $K(X)$ będzie rodziną wszystkich niepustych zbiorów domkniętych w $X$. Pokazać, że topologia generowana przez $(K(X), d_h)$, gdzie $d_h$ jest metryką Hausdorffa, jest zadana przez bazę*

$$\{K \in K(X) \colon K \subseteq U_0, K \cap U_1 \neq \emptyset, \ldots, K \cap U_n \neq \emptyset\},$$

*gdzie $U_0, \ldots, U_n$ są zbiorami otwartymi w $X$. W pierwszej kolejności pokazać, że zbiory powyższej postaci stanowią bazę pewnej topologii $K(X)$.*

**Rozwiązanie.** Zanim przejdziemy do rozwiązania opiszę stosowaną przeze mnie notację:

- Dla pewnej skończonej rodziny $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$ otwartych zbiorów w $X$ przez $\mathcal{K}(\mathcal{U})$ mam na myśli element bazy zdefiniowanej w zadaniu, czyli zbiór

  $$\{K \in K(X) \colon K \subseteq U_0, K \cap U_1 \neq \emptyset, \ldots, K \cap U_n \neq \emptyset\}.$$

  Czasem piszę $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{U})$, wydaje mi się że konflikt nazwy funkcji z nazwą elementu bazy nie stanowi zagrożenia dla czytelności.

- Przez $\mathcal{B}_K$ oznaczam bazę topologii $K(X)$, czyli

  $$\mathcal{B}_K = \{\mathcal{K}(\mathcal{U}) \colon \mathcal{U} \text{ skończona rodzina otwartych zbiorów z } X\}.$$

- Przez $B_T(t, r)$ oznaczam kulę topologii metrycznej $T$ o środku w $t$ i promieniu $r$, np. $B_{K(X)}(K, r)$ jest kulą w topologii zadanej przez metrykę Hausdorffa na zbiorze $K(X)$.

- Przeładowuję nazwę funkcji $d$, z kontekstu jasno wynika jak jej używam, ale dla pewności: jeśli $x, y \in X$, to $d(x, y)$ jest po prostu odległością w danej przez zadanie metryce, jeśli $x \in X, Y \subset X$, to $d(x, Y) = \inf\{d(x, y) \colon y \in Y\}$, jeśli $Z, Y \subseteq X$, to $d(Z, Y) = \sup\{d(z, Y) \colon z \in Z\}$. Wtedy $d_h(Z, Y) = \max\{d(Z, Y), d(Y, Z)\}$

Chcemy zobaczyć, że $\mathcal{B}_K$ jest w ogóle bazą jakiejś topologii $K(X)$. Musimy zatem pokazać dwa punkty z twierdzenia 1.2.6 ze skryptu.

- $\bigcup \mathcal{B}_K = K(X)$: zbiór $\mathcal{K}(\{X\}) = K(X)$ – każdy zbiór domknięty jest zawarty w całej przestrzeni, która jest otwarta, więc każdy zbiór domknięty należy do $\mathcal{K}(\{X\})$.

- Dla dowolnych $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in \mathcal{B}_K$ i punktu $F \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ jest jakiś zbiór $\mathcal{K}$ taki, że $F \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$: jeśli $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}(\{U_0, U_1, \ldots, U_n\})$, $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}(\{V_0, V_1, \ldots, V_m\})$, to wtedy

  $$\mathcal{K} = \mathcal{K}(\{U_0 \cap V_0, U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m\})$$

  jest szukanym przez nas $\mathcal{K}$ dla dowolnego $F$ (pozwolę sobie nie pokazywać tego szczegółowo – trudność tej części to pikuś w porównaniu do reszty zadania).

Pokażemy teraz główną część zadania. W tym celu udowodnimy, że baza topologii generowanej przez metrykę (czyli zbiór kul w tej metryce) jest rodziną zbiorów otwartych w topologii generowanej przez $\mathcal{B}_K$ i odwrotnie.

- Chcemy pokazać że kule w topologii metrycznej są otwarte w topologii generowanej przez $\mathcal{B}_K$. Dokładniej, pokażemy, że dla dowolnej kuli $B_{K(X)}(F, r)$ i dla dowolnego $A \in B_{K(X)}(F, r)$ jest taki zbiór $\mathcal{K} \in \mathcal{B}_K$, że $A \in \mathcal{K} \subseteq B_{K(X)}(F, r)$ (tw. 1.2.6 ze skryptu).

  Niech $r' = r - d_h(F, A) > 0$. Spójrzmy na rodzinę kul w topologii indukowanej przez $A$:

  $$\mathcal{U} = \{B_A(a, r'/2) \colon a \in A\}.$$

  Jest to oczywiście jakieś pokrycie $A$, zatem ze zwartości $A$ możemy z niego wybrać skończone pokrycie $B_A(a_1, r'/2), \ldots, B_A(a_n, r'/2)$. Zauważmy, że kule w $A$ mają swoje odpowiedniki w $X$ które pokrywają $A$, to oczywiście $B_X(a_1, r'/2), \ldots, B_X(a_n, r'/2)$. Zadeklarujmy zatem zbiór

  $$\mathcal{K} = \mathcal{K}\left(\left\{\bigcup_{i=1}^{n} B_X(a_i, r'/2), B_X(a_1, r'/2), \ldots, B_X(a_n, r'/2)\right\}\right).$$

  Oczywiście $A \in \mathcal{K}$. Weźmy teraz dowolny zbiór $C \in \mathcal{K}$. Chcemy pokazać, że jest on też w $B_{K(X)}(F, r)$. W tym celu pokażemy, że $d_h(A, C) < r'$. Weźmy dowolny element $a \in A$. Punkt

$a$ należy do pewnej kuli z naszego pokrycia, czyli $a \in B_X(a_i, r'/2)$ dla pewnego $i$. Wiemy, że $C$ ma nietrywialne przecięcie z tą kulą, zatem $d(a, C) < 2 \cdot r'/2 = r'$. W takim razie $d(A, C) < r'$. Analogicznie pokazujemy, że $d(C, A) < r'$, a zatem $d_h(A, C) < r'$. Możemy z nierówności trójkąta napisać

$$d_h(F, C) \leq d_h(F, A) + d_h(A, C) = r - r' + d_h(A, C) < r - r' + r' = r.$$

Otrzymaliśmy zatem inkluzję $\mathcal{K} \subseteq B_{K(X)}(F, r)$ i pokazaliśmy to co chcieliśmy. $\square$

- Chcemy teraz pokazać, że dla dowolnego zbioru $\mathcal{K} \in \mathcal{B}_K$ i punktu $K \in \mathcal{K}$ jest kula o środku w $K$ zawarta w $\mathcal{K}$ (to zapewni nam, że nasza baza $\mathcal{B}_K$ jest rodziną otwartych zbiorów w topologii generowanej przez metrykę Hausdorffa). Musimy znaleźć odpowiedni promień. W tym celu wyznaczymy na niego kilka górnych ograniczeń i weźmiemy z nich infimum. Niech $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{U})$ dla pewnej rodziny otwartych zbiorów $U_0, U_1, \ldots, U_n$. Zauważmy, że bez straty ogólności możemy założyć, że $U_i \subseteq U_0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

  Zajmiemy się najpierw tym, żeby wszystkie punkty w kuli na pewno zawierały się w $U_0$. Wiemy, że zbiór $K$ jest zwarty, ponieważ jest domkniętym podzbiorem zwartej przestrzeni, zatem $\{U_0\}$ jest jakimś jego pokryciem. Możemy zatem z tw. 2.1.4 (ii) oraz lematu 2.1.3 znaleźć liczbę Lebesgue'a $r_0 > 0$ dla tego pokrycia. Wtedy dowolny $F \in B_{K(X)}(K, r_0)$ zawiera się w $U_0$. Faktycznie, skoro dla dowolnego punktu $x \in K$ kula $B_X(x, r_0)$ zawiera się w $U_0$, to suma $S = \bigcup_{x \in K} B_X(x, r_0) \subseteq U_0$. Z drugiej strony nietrudno zauważyć, że $F \subseteq S$. Gdyby jakiś element $F$ wykraczał poza $S$, to jego odległość od $K$ w metryce Hausdorffa byłaby co najmniej równa $r_0$, a to przeczy naszemu założeniu o tym, że $F \in B_{K(X)}(K, r_0)$. Zatem $F \subseteq S \subseteq U_0$.

  Spróbujemy teraz ograniczyć promień tak, aby na pewno zbiory w kuli miały niepuste przecięcie z dowolnym elementem $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Wybierzmy zatem jakiś zbiór $U_i$ dla pewnego $i = 1, 2, \ldots, n$. Wybierzmy jakiś punkt $x \in K \cap U_i \neq \emptyset$. Skoro $U_i$ jest jakimś otwartym otoczeniem $x$, to możemy wybrać $r_i > 0$ takie, że $B_X(x, r_i) \subseteq U_i$. Zobaczmy, że jeśli $F \in B_{K(X)}(K, r_i)$, to $F \cap B_X(x, r_i) \neq \emptyset$ (w kuli o promieniu $r_i$ i środku w $x$ musi być jakiś element $F$, inaczej $d(x, F) \geq r_i$), a zatem $F$ ma również niepuste przecięcie z $U_i$.

  Oczywiste w tym momencie jest, że jeśli przyjmiemy $r = \min\{r_0, r_1, \ldots, r_n\}$, to dla dowolnego $F \in B_{K(X)}(K, r)$ zachodzą wszystkie konieczne warunki, żeby stwierdzić, że $F \in \mathcal{K}$. Z dowolności wyboru $F$ mamy $K \in B_{K(X)}(K, r) \subseteq \mathcal{K}$ czyli to co chcieliśmy. $\square$