zad. 7 10 PKT

Lemat 1: $\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(x+i)(n-i)!\,i!}$

D-d. Pokażemy to indukcyjnie.

Dla $n = 0$ teza jest oczywista.

Weźmy teraz $n > 0$ i załóżmy tezę dla $n-1$. Oznaczmy $P_n = \prod_{i=0}^{n} (x+i)$.

Wtedy z ZIM

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{(x+n)P_{n-1}} \overset{ZI}{=} \frac{1}{x+n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{(x+i)(n-i-1)!\,i!} \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(x+i)(n-i)!\,i!}$$

Będziemy wykonywać równoważne przejście.

$$\frac{1}{x+n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{(x+i)(n-i-1)!\,i!} - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(x+i)(n-i)!\,i!} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{(-1)^i}{(x+n)(x+i)(n-i-1)!\,i!} - \frac{(-1)^i}{(x+i)(n-i)!\,i!} \right] = \frac{(-1)^n}{(x+n)\,n!}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)(-1)^i - (-1)^i(x+n)}{(x+n)(x+i)(n-i)!\,i!} = \frac{(-1)^n}{(x+n)\,n!}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{n!(-1)^{i+1}}{(n-i)!\,i!} = (-1)^n$$

$$\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i}_{(1-1)^n=0} \Big) - \binom{n}{n}(-1)^n \overset{?}{=} (-1)^{n+1}$$

$$(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$$

✓

Lemat 2: $\ln(x+a) - \ln(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

D-d. $\ln(x+a) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+a}{x}\right) \to \ln(1) = 0$.

Przejdźmy do naszej całki.

$$\int_1^\infty \frac{1}{P_n}\,dx \overset{\text{lemat 1}}{=} \int_1^\infty \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(x+i)(n-i)!\,i!}\,dx =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \ln|x+i|}{\cancel{x+i}(n-i)!\,i!} \right) \Bigg|_1^\infty =$$

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \ln|x+i|}{(n-i)!\,i!} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \ln|x+i| = 0$$

Dla każdego ujemnego wystąpienia logarytmu w tej sumie możemy znaleźć jakieś dodatnie, z lematu 2 ich różnica dąży do 0, takich par jest 2^n, ale n jest ustalone więc suma 2^n ciągów zbiegających do 0 również zbiega do 0.

Stąd

$$\int_1^\infty \frac{1}{P_n}\,dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i+1} \ln(i)}{(n-i)!\,i!}.$$

zad. 1 LISTA 11 3PKT

a)

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2} = \frac{1-0+0}{1+0} = 1$$

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} \underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} = 0$$

Gdy $x=0$ to $\frac{\sin(0)^{=0}}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$.

c)

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} xe^{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to 0} e^{-\overbrace{\frac{1}{y^2}}^{\to\infty}} = 0$$

d)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y^2)}{|x|^3+|y|^3} \cancel{\leq \frac{\sin(x^2y^2)}{(|x|+|y|)^3}}$$

Bso $|x| \geq |y|$, wtedy

$$\frac{\sin(x^2y^2)}{|x|^3+|y|^3} \geq \frac{\sin(y^4)}{|y|^3} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

$$\wedge|$$

$$\frac{\sin(x^4)}{|x|^3} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Więc $\frac{\sin(x^2y^2)}{|x|^3+|y|^3} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$

e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Bso $x \geq y$, wtedy

$$0 \leftarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} \geq \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq \frac{y^2}{\sqrt{y^2}} = y \to 0$$

f) $\lim_{(x,y,z)\to 0} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

$|x^3+y^3+z^3| \leq |x|x^2+|y|y^2+|z|z^2 \leq$

$\leq (|x|+|y|+|z|)(x^2+y^2+z^2)$

Stąd

$\lim_{(x,y,z)\to 0} \frac{|x^3+y^3+z^3|}{x^2+y^2+z^2} \leq \lim_{(x,y,z)\to 0} |x|+|y|+|z| = 0$

Więc granica jest równa 0.

zad. 2 3 PKT

a) $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x}{y}$ dla $x=0$ mamy $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x}{y} = 0$

Dla $x=y$ mamy $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x}{y} = 1$.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y|^x$ dla $x=0$ mamy $\lim_{(x,y)\to 0} |y|^0 = 1$

Dla ~~x=1~~ $y=0$ mamy $\lim_{(x,y)\to 0} |y|^x = 0$.

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ dla $x=y$ granica to $\frac{1}{2}$,
dla $x=0$ granica to 0.

Zad. 6 4 PKT

Weźmy $\varepsilon > 0$. Niech $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Wtedy

$d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow x^2+y^2 < \varepsilon$.

Oraz

$d(x,y) < \delta = \left|\frac{y}{x}\right| < \left|\frac{x^3}{x}\right| = x^2 < \varepsilon - y^2 < \varepsilon$

Więc $\lim_{(x,y)\to 0} \left|\frac{xy}{x}\right| = 0$.

Zad. 4 2 PKT

a) Koło jest swoim własnym wnętrzem

b) $\mathrm{Int}\{(x,y) \mid xy \geq 1\} = \{(x,y) \mid xy > 1\}$

c) $\{(x,y) \mid \max(|x|,|y|) = 1\}$

Brzeg kwadratu ma puste wnętrze.

Zad. 5 2 PKT

a) $\{(x,y) \mid (x+3)^2 + (y-2)^2 = 6^2\}$

b) OX

c) Boki tego trójkąta

d) Wykres funkcji ciągłej jest brzegowym zbiorem

e) $\emptyset$

Zad. 2 4PKT LISTA 10

f jest dodatnia, malejąca i zbiega do 0 na $[N, \infty)$

Z nierówności

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq f(k-1)$$

mamy zbieżność szeregu $\sum_{k=N}^{\infty} f(k)$ równoważną ze zbieżnością ciągu $\sum_{k=N}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)dx$, co z kolei jest równoważne zbieżności

$$\int_{N}^{\infty} f(x)\,dx.$$

f jest dodatnia, bo malejąca i zbiega do 0.

Zad. 3 3PKT

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}.$$

Weźmy $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

$f'(x) = \left((x\ln^{\alpha} x)^{-1}\right)' = -1\cdot(x\ln^{\alpha} x)^{-2}\cdot\left[(\ln^{\alpha} x)'\cdot x + \ln^{\alpha} x\right] <$

zad. 3 3PKT

$$\int \frac{1}{x\ln^{\alpha}x}dx = \frac{\ln^{1-\alpha}x}{1-\alpha} \quad \text{dla } \alpha \neq 1$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^{\alpha}x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x\ln^{\alpha}x}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{\ln^{1-\alpha}b}{1-\alpha} - \frac{\ln^{1-\alpha}2}{1-\alpha}$$

zbiega, jeśli $\alpha > 1$ i rozbiega w p.ω.

Gdy $\alpha = 1$ to

$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln\ln x$. Wtedy

$\lim_{b\to\infty} \ln\ln b = \infty$. Zatem pierwsza całka zbiega, gdy $\alpha > 1$, a zbieżność tej całki jest równoważna zbieżności tego szeregu.

$$\int \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^{\alpha}} = \frac{(\ln\ln x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{dla } \alpha \neq 1$$

Zatem

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^{\alpha}} = \lim_{b\to\infty} \frac{\ln(\ln x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \text{coś stałego.}$$

Znowu to zbiega ~~tka~~ jeśli $\alpha > 1$ i rozbiega w p.ω.

Gdy $\alpha = 1$

$$\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x} = \ln\ln\ln x \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty.$$

zad. 4 3 PKT

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{2000}}{n^{1,001}}$ Funkcja $\ln^{\alpha} x$ dla $\alpha > 0$

rośnie wolniej niż x^{β}, $\beta > 0$

więc jest takie n_0, że dla $n > n_0$

$\ln^{2000} n < n^{0,0005} \Leftrightarrow \frac{\ln^{2000} n}{n^{1,001}} < \frac{1}{n^{1,0005}}$.

$\varepsilon > 0$

$\int \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} dx = \frac{x^{-\varepsilon}}{\varepsilon}$, a więc całka

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} dx = \lim_{b \to \infty} \frac{b^{-\varepsilon}}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}$ zbiega,

a z zadania 2 zbiega też

szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1+\varepsilon}}$ co dla $\varepsilon = 0,0005$

jest większe od $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{2000}}{n^{1.001}}$, więc

ten szereg jest zbieżny.