$$n! \cdot \int_0 (x \log x)^n dx = (n+1)^{-(n+1)}$$

Stąd

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-x\log x)^n}{n!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

LISTA 11

zad. 9 3 PKT

Wybieramy sobie dowolne c. Jeśli zbiór $\{(x,y) \mid f(x,y) < c\}$ jest pusty to jest otwarty. W p.w. weźmy dowolny (x_0, y_0) z tego zbioru. Z ~~ciągłości dowolny ciąg punktów zbiegający do (x_0, y_0) zbiega w f do $f(x_0,y_0) < c$, więc ten ciąg też od pewnego miejsca jest mniejszy od c.~~

Niech $\varepsilon = c - f(x_0, y_0) > 0$.

Wtedy z ciągłości jest taka $\delta > 0$, że

$$d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon = c - f(x_0,y_0)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y) < c.$$

Z podobnego argumentu jeśli $f(x,y) > c$ to $(x,y) \notin$ ~~$\{$~~ $bd\{(x,y) \mid f(x,y) \leq c\}$. Widać, że w takim razie $bd\{(x,y) \mid f(x,y) < c\} = \{(x,y) \mid f(x,y) = c\}$

zad. 8 3 PKT

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ dla $f(x,y) = e^{\cos x} \log(\operatorname{arctg} xy + e^{\sin(x^2 \cdot y)})$

$f(x,0) = e^{\cos x} \cdot \log(\operatorname{arctg} 0 + e^{\sin(0)}) =$

$= e^{\cos x} \cdot \log(0+1) = e^{\cos x} \cdot \log(1) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0.$

LISTA 12

zad. 1 3PKT

Funkcja $\pi^{-1} + x^3$ musi mieć jakiś punkt przecięcia z $\sin x$, gdyż przyjmuje wszystkie rzeczywiste wartości i obie funkcje są ciągłe. Niech zatem

$$\pi^{-1} + x_0^3 = \sin x_0 .$$

Wtedy funkcja $g(y) = f(x_0, y)$ jest z założeń ciągła i różniczkowalna. Zatem jest takie c, że

$$0 = \frac{g(1) - g(0)}{1-0} = g'(c) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, c).$$

zad. 2 3 PKT

Rozważmy funkcje $f_{x_0}(y) = g(x_0, y)$ oraz $h_{y_0}(x) = g(x, y_0)$. Z założeń obie te funkcje są ~~dodatnie~~ rosnące, stąd jeśli $s > x$, $t > y$, to

$$g(x, y) = f_x(y) < f_x(t) = g(x, t) <$$
$$< h_t(x) < h_t(s) = g(s, t).$$ ∎

zad. 3 3 PKT

na ćw. doszliście

wiem ... jest ciągła

$$\left(\frac{}{du} \right) = -\left(\frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) =$$

$$= -\frac{\partial z}{\partial y}$$

zad. Z 3PKT

$$z = f(u), \quad u = g(x,y) = x - y$$

Wtedy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial y}.$$

zad. 3 3PKT

Niech $z = h(x,y)$, $x = g_1(t)$, $y = g_2(t)$, gdzie

$g_1(t) = t\pi$, $g_2(t) = t \cdot e$.

Wtedy

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \pi + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot e$$

z założenia.

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (\pi - e) + e\left(\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}}_{> 0}\right) > 0$$

gdy dodamy nierówności stronami to dostaniemy

$$2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} > 0$$

Zatem $h(g_1(t), g_2(t))$ jest rosnąca, więc

$h(\pi, e) > h(0,0)$. ■