jest zupełna.

---

zad. 7 Weźmy dowolny wektor v. Jeśli $\lambda = Q(v, v) < 0$, to $Q\left(\frac{v}{\sqrt{|\lambda|}}, \frac{v}{\sqrt{|\lambda|}}\right) = -1$.

Jeśli $Q(v, v) > 0$, to $Q(iv, iv) < 0$ i możemy postąpić tak jak wcześniej.

Jeśli $Q(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ to $Q(v, v) \geq 0$.

(z wykładu)

zad. 8

$$f(\alpha x+\beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z) =$$

$$= \alpha g(x, z) + \alpha i h(x, z) + \beta g(y, z) + \beta i h(y, z)$$

$$= \alpha g(x, z) + \beta g(y, z) + \alpha i h(x, z) + \beta i h(y, z)$$

$$\|$$

$$g(\alpha x+\beta y, z) + i h(\alpha x + \beta y, z)$$

Skoro wartości g, h są rzeczywiste, to wartość g jest częścią rzeczywistą a wartość h urojoną. Więc

$$\alpha g(x, z) + \beta g(y, z) = g(\alpha x + \beta y, z)$$

$$\alpha h(x, z) + \beta h(y, z) = h(\alpha x + \beta y, z)$$

$$g(x, \alpha y+\beta z) + ih(x, \alpha y+\beta z) = f(x, \alpha y+\beta z) =$$

$$= \overline{f(\alpha y+\beta z, x)} = \overline{\alpha g(y,x)} + \overline{\beta g(z,x)} +$$

$$+ \overline{\alpha i h(y,x)} + \overline{\beta i h(z,x)} =$$

$$= \bar{\alpha} g(y,x) + \bar{\beta} g(z,x) - \bar{\alpha} i h(y,x) -$$

$$- \bar{\beta} i h(z,x)$$

Stąd

$$\bar{\alpha} g(y,x) + \bar{\beta} g(z,x) = g(x, \alpha y+\beta z)$$

$$-(\bar{\alpha} h(y,x) + \bar{\beta} h(z,x)) = h(x, \alpha y+\beta z)$$

Ale możemy to sprzęc – wtedy skalary już nie będą sprzężone, a wartości g i h nie zmienią sprzężenia.

Zatem g jest dwuliniowa i symetryczna, a h jest dwuliniowa i antysymetryczna.

zad 15

Weźmy wektory w $\mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{pmatrix} a \\ c \\ a \\ c \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} b \\ a \\ a \\ b \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} c \\ c \\ b \\ b \end{pmatrix}$$

Wtedy z nierówności trójkąta

$$\|v + w + u\| \leq \|v\| + \|w\| + \|u\|$$

a to dokładnie nierówność zadania.

zad. 11

a) $(T^*)^* = \left(\overline{T}^T\right)^* = \overline{\overline{T}} = T$

b) $(T+S)^* = \left(\overline{T+S}\right)^T = \left(\overline{T} + \overline{S}\right)^T =$

$= \overline{T}^T + \overline{S}^T = T^* + S^*$

c) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha T}^T = \overline{\alpha} T^*$

d) $(TS)^* = \left(\overline{TS}\right)^T = \left(\overline{T} \cdot \overline{S}\right)^T = \overline{S}^T \cdot \overline{T}^T = S^* \cdot T^*$

e) $(T^{-1})^*$ Operacja sprzężenia jest liniowa, a odwrotność macierzy ~~macierzy~~ zależy od niej liniowo, więc $\left(\overline{T}\right)^{-1} = \left(\overline{T^{-1}}\right)$. Wiemy też, że $(T^T)^{-1} = (T^{-1})^T$, stąd $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.