Zad. 5

$\|x\| = \|y\|$. Wtedy BSO $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y_n = (y_1, \dots, y_n)$ w bazie standardowej. Wtedy

$$(x+y \mid x-y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)(x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - y_i^2 =$$

$$= \|x\| - \|y\| = 0. \quad \blacksquare$$

Zad. 4

ad. 7

a) Weźmy $v \in (\cancel{U \cap W})^\perp$. $(U^\perp + W^\perp)$.

Czyli $v = u^\perp + w^\perp$ dla pewnych $u^\perp \in U^\perp$, $w \in W^\perp$.

Stąd dla $x \in (U \cap W)$ mamy

$$(v|x) = (u^\perp|x) + (w^\perp|x) = 0$$

bo $u^\perp \perp x$ oraz $w^\perp \perp x$.

Zatem $(U^\perp + W^\perp) \subseteq (U \cap W)^\perp$.

Weźmy $v \in (U^\perp + W^\perp)^\perp$.

Czyli dla dowolnego $u^\perp \in U^\perp$, $w^\perp \in W^\perp$

mamy $0 = (v \mid u^\perp + w^\perp) = \underset{0}{\underbrace{(v|u^\perp)}} + \underset{0}{\underbrace{(v|w^\perp)}}$

Zatem $v \in (U^\perp)^\perp = U$

$v \in (W^\perp)^\perp = W$ $\Rightarrow v \in (U \cap W)$

Zatem $(U^\perp + W^\perp) \supseteq (U \cap W)^\perp$,

więc $U^\perp + W^\perp = (U \cap W)^\perp$.

b) Weźmy $v \in \mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp$. Wtedy dla dowolnych $\underset{\hat{u}}{u}, \underset{\hat{w}}{w}$ mamy

$$(v \mid u + w) = (v \mid u) + (v \mid w) = 0$$

Gdyż $v \in \mathcal{U}^\perp$ oraz $\cancel{v} \in \mathcal{W}^\perp$.

Więc $\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp \subseteq (\mathcal{U} + \mathcal{W})^\perp$.

Weźmy $\cancel{v} \in (\mathcal{U} + \mathcal{W})$. Czyli

$v = u + w$ dla pewnych $u \in \mathcal{U}$, $w \in \mathcal{W}$.

Weźmy $x \in (\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp)$. Zatem

$$(v \mid x) = (u \mid x) + (w \mid x) = 0$$

gdyż $x \perp u$ i $x \perp w$.

Więc $\mathcal{U} + \mathcal{W} \subseteq (\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp)^\perp$.

Stąd $(\mathcal{U} + \mathcal{W})^\perp \subseteq (\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp)$.

Więc $(\mathcal{U} + \mathcal{W})^\perp = (\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp)$.

zad. 8

a) $P_W(P_W(v)) = P_W\left(\sum_{i=1}^{k}(v|e_i)e_i\right) =$

$= \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k}(v|e_i)e_i \mid e_j\right)e_j = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}((v|e_i)e_i \mid e_j)e_j$

$= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}(v|e_i)(e_i|e_j)e_j = \sum_{i=1}^{k}(v|e_i)e_i = P_W(v)$

Więc $P_W^2 = P_W$.

b) Oczywiście $\mathrm{Im}\,P_W \subseteq W$, bo to kombinacje liniowe bazy W. Weźmy jakiś $w \in W$. Wtedy dla $v = w$ mamy $P_W(v) = w$, więc $W \subseteq \mathrm{Im}\,P_W$. Stąd $\mathrm{Im}\,P_W = W$.

c) Oczywiście $W^\perp \subseteq \ker P_W$, bo dowolny element z $W^\perp$ zeruje się na każdym elemencie bazy W. Weźmy $w \in \ker P_W$.
Czyli $P_W(w) = \sum_{i=1}^{k}(w|e_i)e_i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (w|e_i) = 0 \Rightarrow w \perp W$, więc

$\ker P_W \subseteq W^\perp \Rightarrow W^\perp = \ker P_W$.

$$\sum_{i=1} \left[e_i - (v|e_i) \right] = \|w - P_W(v)\|^2 > 0.$$

zad. 9 T: $\|v - w\| \geq \|v - P_W(v)\|$.

$$\Updownarrow$$

$$\|w\|^2 - 2(v|w) > \|P_W(v)\|^2 - 2(v|P_W(v))$$

Niech $V = \mathrm{Lin}(\underbrace{e_1, \ldots, e_n}_{\text{ortonormalne.}}), \; W = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_k)$

Wtedy $\|w\|^2 - 2(v|w) - \|P_W(v)\|^2 + 2(v|P_W(v)) =$

$$= \|w\|^2 - 2(P_W(v)|w) - \|P_W(v)\|^2 + 2(P_W(v)|P_W(v)) =$$

$$= \|w\|^2 - 2(P_W(v)|w) + \|P_W(v)\|^2 = \|w - P_W(v)\|^2 > 0. \quad \blacksquare$$

jeśli $d = 1$

zad. 18

$$A \cdot A^T = E, \quad B \cdot B^T = E$$

$$A \cdot B \cdot (A \cdot B)^T = A \cdot B \cdot B^T \cdot A^T = E$$

zad. 21

1