zad. 2

a) $A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$. $\chi_A(x) = x^4 \Rightarrow A$ jest nilpotentna.

$\operatorname{rank} A = 1 \Rightarrow \dim \ker A = 3$.

$\operatorname{Im} A = \{ \begin{pmatrix} 0\\x\\0\\0 \end{pmatrix} \mid x \in K \}$

$\ker A = \langle \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix} \rangle$.

~~V_1~~ Skoro $\dim \ker A = 3$ to J_A składa się z 3 klatek Jordana.

$J_A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$.

$V_1 = \ker A$, $V_2 = \operatorname{Im} A \cap \ker A = \operatorname{Im} A$.

Baza V_2 to np wektor $P_3 = \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\0 \end{pmatrix}$.

Wtedy wektor P_4 to może być $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$. $A \cdot P_4 = P_3$

Dopełniamy bazę V_2 do bazy V_1, $P_1 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}$.

Sprawdźmy:

$$\begin{bmatrix} 0&1&0&1\\ 0&0&2&0\\ 1&0&0&0\\ 0&-1&0&1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 0&1&0&1\\ 0&0&2&0\\ 1&0&0&0\\ 0&-1&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ $\dim \ker B = 2$, on $B^2 = 0$

Zatem jak w poprzednim ~~zadaniu~~ przykładzie wnioskujemy, że będą dwie klatki.

$V_1 = \ker B = \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \rangle$, $\operatorname{Im} B = \{ \begin{pmatrix} x\\y+x\\0\\0 \end{pmatrix} \mid x, y \in K \}$

Zatem $\operatorname{Im} B = \ker B \Rightarrow V_1 = V_2$.

Niech $P_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\0 \end{pmatrix}$. $P_2 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}$

Spr.
$$\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 1&0&2&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 1&0&2&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = J_B$$

c).

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dim \ker C = 1$$

$C^4 = 0$ ale $C^3 \neq 0$

$$\ker C = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \operatorname{Im} C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x, y, z \in K \right\}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^3 = \begin{pmatrix} & & 0 & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$$

$\ker C = V_1$, $\operatorname{Im} C \cap \ker C = V_2$, $\operatorname{Im} C^2 \cap \ker C = V_3$

$\operatorname{Im} C^3 \cap \ker C = V_4$

~~Okazuje się, że $V_2 = V_3 = V_4 = \{0\}$~~

Musi wyjść na to, że wymiary $V_i = 1$.
Co więcej, są sobie równe.
Niech $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, co jest bazą V_i. Chcemy znaleźć P_4 takie, że $C^3 P_4 = P_1$.

Łatwo sprawdzić, że $P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ spełnia rzeczoną własność. Wtedy $P_2 = C^2 P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$P_3 = C P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot C \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zad. 6

$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\chi_A(x) = (4-x)(2-x)+5 =$

$= x^2 - 6x + 13$

$\Delta = -16$, $x_0 = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$.

Wiemy, że $\chi_A(x) = \mu_A(x)$. Ponadto każdy czynnik liniowy jest w 1 potędze, więc A jest diagonalizowalna.

Poszukajmy jej wektorów własnych.

$(A - (3+2i)\cdot \mathcal{E}) v_1 = \begin{bmatrix} 1-2i & -5 \\ 1 & -1-2i \end{bmatrix} v_1 = 0$

$\begin{cases} (1-2i)x + (-5)y = 0 \\ x + (-1-2i)y = 0 \end{cases} \Rightarrow x - 5y - 2ix = 0$

np.

$x = 5, \quad y = 1+2i$

$v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1+2i \end{bmatrix}$

$(A - (3-2i)\mathcal{E}) v_2 = \begin{bmatrix} 1+2i & -5 \\ 1 & -1+2i \end{bmatrix} v_2 = 0$

Analogicznie $v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1-2i \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1+2i & 1-2i \end{bmatrix}^{-1} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1+2i & 1-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2i & 0 \\ 0 & 3+2i \end{bmatrix}$

zad. 4

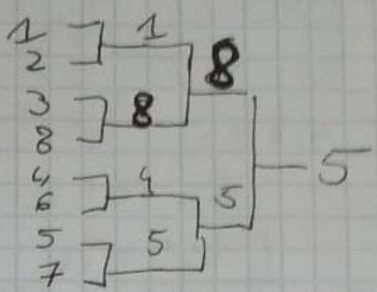
b) $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Zad. 7

Niech T będzie tą macierzą. T ma w sumie 7 jedynek (tyle było meczy) w tym 4 niezerowe wiersze. W każdej kolumnie jest co najwyżej jedna jedynka.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykładowa macierz dla drabinki



~~Weźmy wektor V. Zauważmy, że $T \cdot V$ będzie miał niezerową wartość jedynie w tych wierszach~~

Co to jest macierz T^2?

Zauważmy, że $t_{ij}^2 = 1$ oznacza, że i-ty gracz wygrał z kimś, kto wygrał z j. W p.w $t_{ij}^2 = 0$.

Zatem Niezerowe wiersze T^2 to tylko te zawodników który dostali się do ~~pó~~ finału (musieli wygrać z co najmniej 2 graczami).

Analogicznie w T^3 jeśli $t_{ij}^3 = 1$ to znaczy że i-ty zawodnik wygrał z kimś kto wygrał z kimś z kim ~~wygrał~~ przegrał j. Taki zawodnik jest tylko jeden — wygrany. Zatem $T^4 = 0$. (bo jest tylko jeden jedyny)

~~rank T = 4, ker T =~~

Skoro $T^4 = 0$ ale $T^3 \neq 0$, to w J_T jest klatka rozmiaru 4.
Z drugiej strony klatek jest 4 bo $\dim \ker T = 4$. Więc

$$J_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^T = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

zad. 9

$$A - xE = \begin{bmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{bmatrix} \qquad \chi_A(x) = (a-x)(d-x) - bc =$$

$$= ad + x^2 - (a+d)x - bc =$$

$$= x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

$$\begin{cases} a + d = 12 \Rightarrow [illegible]\ d = 12 - a \\ ad - bc = 36 \end{cases}$$

Z drugiej strony

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 6,\ 6_0$$

$$\chi_A(x) = (x-6)^2$$

$$\begin{cases} 2a - 3b = 12 \Rightarrow 3b = 2a - 12 \\ 2c - 3d = -18 \Rightarrow 2c = 3d - 18 \Rightarrow 2c = 36 - 3a - [illegible] \end{cases}$$

$$a(12-a) - \frac{2a-12}{3} \cdot \frac{18-3a}{2} = 36$$

$$12a - a^2 - \frac{-6a^2 + 36 \cdot 2a - 12 \cdot 18}{6} = 36$$

$$12a - a^2 + a^2 - 12a + 2 \cdot 18 = 36$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$a = 0 \Rightarrow d = 12,\ b = -4,\ c = 9. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$