$$\chi_A(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x-1)(x^2-x+1)$$ (Policzone na boku)

V_1: z
$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -x + y - \sqrt{6}z = 0 \\ x - y + \sqrt{6}z = 0 \\ \sqrt{6}x - \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases}$$ l.z.

[illegible]

$$\Downarrow$$

$\cancel{\cdot\sqrt{6}}$

$$\begin{cases} 6x - 6y + 6\sqrt{6}z = 0 \\ 6x - 6y - 2\sqrt{6}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z = 0 \\ x = y \end{matrix}$$

$V_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$, niech $V_2 = \left\langle \underset{e_1''}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{e_2''}{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}} \right\rangle$.

Wtedy $V = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ jest bazą ortonormalną.

$$A(\alpha e_1 + \beta e_2) = (a\alpha - c\beta)e_1 + (c\alpha + a\beta)e_2$$

$$\|$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}\alpha}{4} \\ -\frac{\beta}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}\alpha}{4} \\ \frac{\sqrt{3}\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\right)e_1 +$$

$$+ \left(-\frac{\sqrt{12}}{4}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)e_2 \quad \checkmark$$

$$A_{V_2} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\|$$

$$K = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \text{baza to } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c)

$$A = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix} . \qquad \lambda_1 = 1$$

$$0 = (A - E)X = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (1) & -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ (2) & x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ (3) & -x_1 + x_2 - \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 0 \\ (4) & -x_1 + x_2 + x_3 - \frac{3}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

(1), (2) LZ.

$$\Rightarrow \frac{5}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 = 0 \;\Downarrow\; x_3 = x_4 \;\Downarrow$$

$$(2) + (3) \Rightarrow -\frac{5}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$

Stogd $x_1 = x_2,\ x_3 = x_4 = 0$

$$V^1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$0 = (A + E)X = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(3), (4) LZ.

$$\rightarrow \begin{cases} 4x_1 = 4x_2 \\ 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = \;\Downarrow\; x_3 = -x_4$$

$$V^{-1} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V_2 = V^1,\ V_3 = V^{-1},\ V_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right.$$

$$V_1 \perp V_2 \perp V_3 \perp V_1 .$$

$$\ldots + (c\alpha + a\beta)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Niech $V_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, wtedy

$$V_1 \perp V^1 \perp V^{-1} \perp V_1 \quad \text{oraz} \quad V_1 \oplus V^1 \oplus V^{-1} = V.$$

$$x = \alpha \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{Vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{Vmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\\ \frac{\beta}{\sqrt{2}}\\ \frac{\beta}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2\beta}{\sqrt{2}}\\ -\frac{2\beta}{\sqrt{2}}\\ \frac{2\alpha}{\sqrt{2}}\\ \frac{2\alpha}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} =$$

$$= (a\cdot\alpha - c\beta)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (c\alpha + a\beta)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A_{V_1} = \begin{Vmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{Vmatrix}$$

Zatem szukana macierz to

$$\begin{Vmatrix}0 & -2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{Vmatrix} \quad \text{w bazie} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

zad. 7 Wiemy, że operatory ortogonalne rozkładają się na sumę prostą jedno i dwuwymiarowych podprzestrzeni niezmienniczych, więc ~~ich~~ krotność algebraiczna dowolnej wartości własnej jest równa jej krotności geometrycznej. Stąd prosty wniosek, że jeśli jakieś przekształcenie $\mathbb{R}^6$ ma jakiś wektor własny, to jego wielomian charakterystyczny jest postaci $(x \pm 1) Q(x)$, gdzie $Q(x)$ ma stopień 5, więc musi mieć chociaż jeden pierwiastek, zatem musi być jeszcze jedna jednowymiarowa przestrzeń niezmiennicza, a tym samym jeszcze jeden lnz. wektor własny. ∎

zad. 8

Zad. 8

Przekształcenia ortogonalne, które są samosprzężone w postaci kanonicznej są diagonalne z wartościami 1 oraz -1, więc to takie operatory, które jedynie odbijają wektory wzdłuż ~~swoich osi~~ pewnych osi.

wzdłuż ~~swoich~~ ~~osi~~ pewnych osi.

zad. 9 Jeśli $\operatorname{spec} T \subset [0, +\infty)$ to w pewnej bazie ortonormalnej macierz przekształcenia wygląda tak:

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_m & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{Vmatrix}, \quad \lambda_i > 0.$$

Wtedy dla dowolnego X

$${}^tXAX = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_m x_m^2 \geqslant 0,$$ więc T jest dodatnio półokreślone.

Z drugiej strony, ~~jeśli z tw. 9~~ jeśli T jest dodatnio półokreślone, to z tw. 7 w pewnej bazie macierz ~~jego~~ tego przekształcenia wygląda tak:

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_m & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{Vmatrix}, \quad \lambda_i > 0.$$

Co więcej, λ_i są wartościami własnymi T, stąd $\operatorname{spec} T \subset [0, +\infty)$.

zad. 11

Niech forma kwadratowa $Q(x)$ dana jest równaniem $Q(x) = {}^t x \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} x$.

Wtedy $Q^{-1}[\{1\}] = C$. Wartość Q nie zależy od wyboru bazy, zatem w pewnej bazie macierz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ ma postać $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, gdzie λ, μ są wektorami własnymi tej macierzy (jest symetryczna, więc takie na pewno są). Bazą są jakieś ortogonalne wektory własne.

Zad. 18 $\cos(\sphericalangle e_i, e_j) = \dfrac{|(e_i|e_j)|}{\|e_i\|\cdot\|e_j\|}$

Chcemy, żeby $|(e_1|e_2)| = \frac{1}{2}$, $|(e_2|e_3)| = \frac{1}{3}$ oraz $|(e_1|e_3)| = \frac{1}{4}$ oraz $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$.

Niech
$$F = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$
Wtedy $(X|Y) = {}^tX F Y$ jest dodatnio określone oraz kąty między wektorami bazy standardowej wynoszą tyle ile chcieliśmy.