G. KARCH & M. KRUPSKI & SZ. CYGAN

"Do not worry about your difficulties in mathematics,
I assure you that mine are greater."

Albert Einstein

Równania w postaci różniczek zupełnych

Zadanie 1. Rozwiąż równania (w różniczkach zupełnych):

a) $2ty \,\mathrm{d}t + (t^2 - y^2) \,\mathrm{d}y = 0$,

b) $e^{-y} \,\mathrm{d}t - (2y + te^{-y}) \,\mathrm{d}y = 0$,

c) $\left(t - y\cos\frac{y}{t}\right) \,\mathrm{d}t + t\cos\frac{y}{t} \,\mathrm{d}y = 0$,

d) $y' = \frac{x+2}{t+1} + \operatorname{tg}\frac{x-2t}{t+1}$.

Zadanie 2. W podanych równaniach dobierz stałą a lub funkcję $f(t)$ tak, aby było ono zupełne, a następnie rozwiąż je:

a) $t + ye^{2ty} + ate^{2ty}y' = 0$,   b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{(at+1)}{y^3}y' = 0$,   c) $y^2\sin t + yf(t)y' = 0$.

Zadanie 3. Znajdź współczynnik $f = f(t)$ w równaniu $fy' + t^2 + y = 0$ jeżeli wiadomo, że ma ono czynnik całkujący postaci $u(t) = t$.

Zadanie 4. Scałkuj równania metodą czynnika całkującego:

a) $\left(\frac{t}{y} + 1\right) \,\mathrm{d}t + \left(\frac{t}{y} - 1\right) \,\mathrm{d}y = 0$,

b) $(t^2 + y) \,\mathrm{d}t - t \,\mathrm{d}y = 0$,

c) $(y + t^2) \,\mathrm{d}y + (t - ty) \,\mathrm{d}t = 0$,

d) $ty^2 \,\mathrm{d}t - (t^2y - t) \,\mathrm{d}y = 0$.

Zadanie 5. Uzasadnij, że równanie $M(t) + N(y)y' = 0$ o zmiennych rozdzielonych jest zupełne. Uzasadnij, że równanie liniowe niejednorodne $y' + a(t)y = b(t)$ nie jest zupełne. Znajdź jego czynnik całkujący.

Zadanie 6. Równanie różniczkowe może mieć więcej niż jeden czynnik całkujący. Udowodnij, że $\mu_1(x,y) = \frac{1}{xy}$, $\mu_2(x,y) = \frac{1}{y^2}$, $\mu_3(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ są czynnikami całkującymi równania

$$y \,\mathrm{d}x - x \,\mathrm{d}y = 0.$$

Uzasadnij, że otrzymane przy pomocy tych czynników całkujących rozwiązania są równoważne.

Zadanie 7. Wykaż, że krzywe całkowe równania

$$\left[2t(t^2 - aty + y^2) - x^2\sqrt{t^2 + y^2}\right] \,\mathrm{d}t + y\left[2(t^2 - aty + y^2) + t\sqrt{t^2 + y^2}\right] \,\mathrm{d}y = 0,$$

gdzie $|a| < 2$, są krzywymi zamkniętymi.
WSKAZÓWKA: Wprowadź zmienne biegunowe.