14.04.2021

$$\mathbb{E}X \overset{df}{=} \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mu_X(x)$$

<u>Przykład</u> Ile średnio musimy wykonać rzut kostką, aby otrzymać 6?

Ogólniej: sukces z p-stwem p, ile razy musimy wykonać doświadczenie, aby otrzymać sukces?

X – l. prób do pierwszego sukcesu.

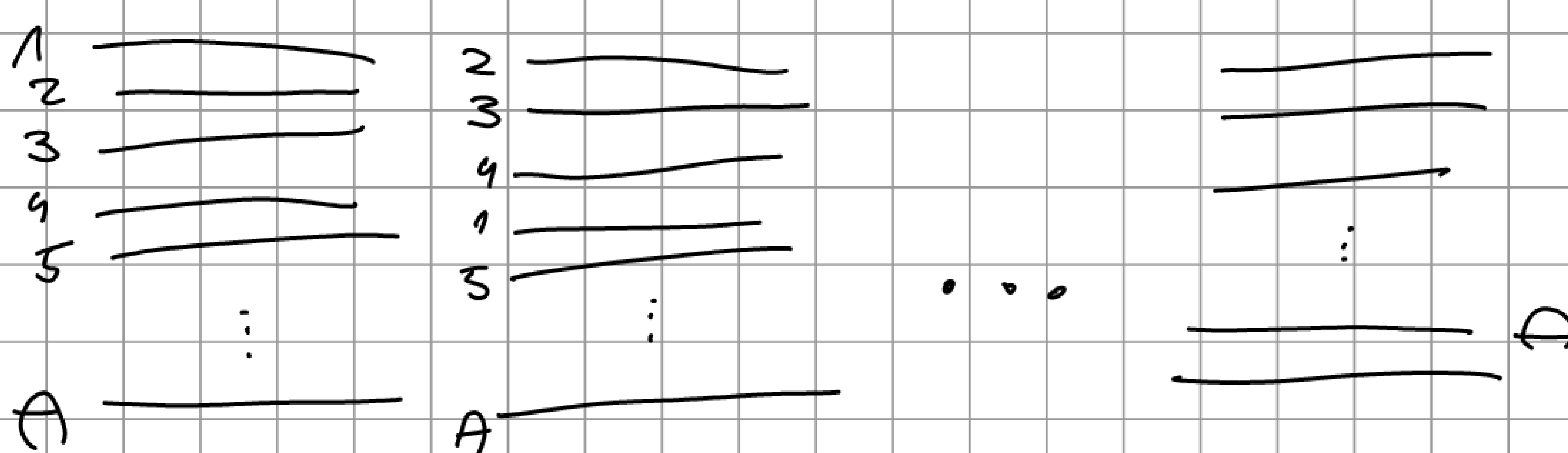
$$\mathbb{P}[X=k] = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad , \quad k \geq 1$$

$$X \sim Geom(p)$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p =$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k$$

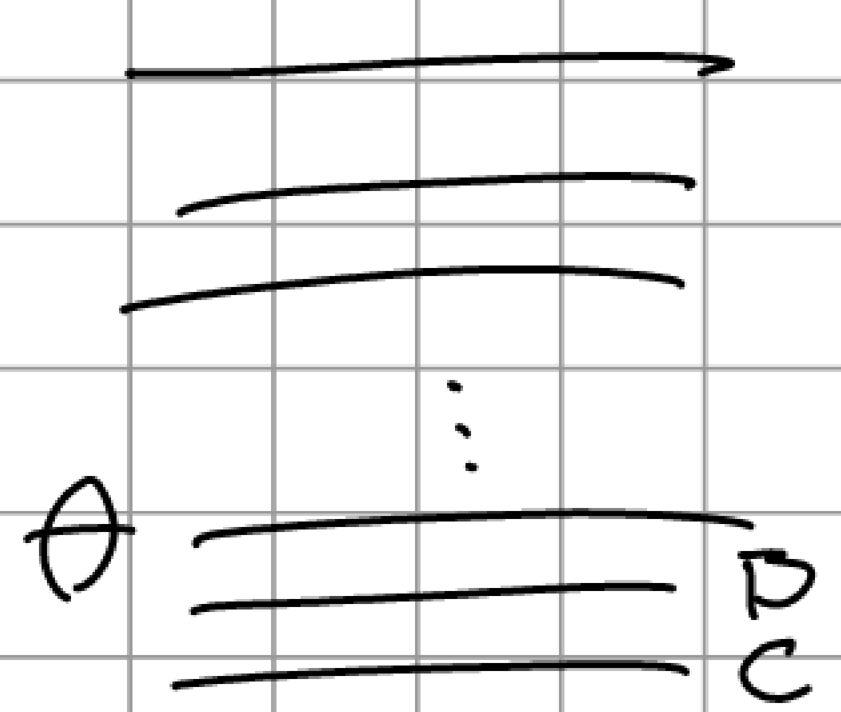
Przykład Tasujemy talię 52 kart metodą TOP TO RANDOM, tzn. kartę z góry wkładamy w losowe miejsce w talii, a następnie powtarzamy czynność. Ile należy wykonać tasowań, żeby talię uznać za posortowaną?



Z lematu B–C wynika, że w pewnym momencie karta z góry zostanie włożona pod kartę A.

Z przykładu wiemy, że l. oczekiwanych kroków wynosi 52.

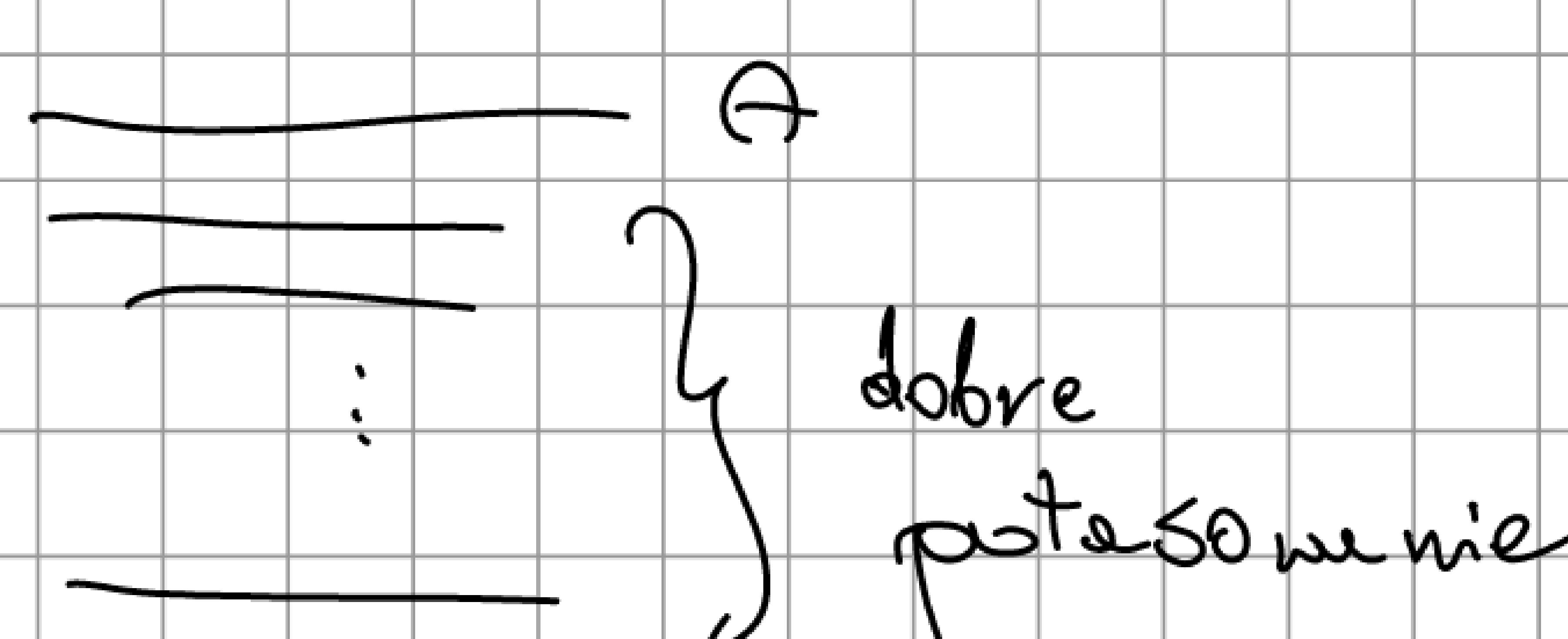
Po pewnej 1. operacji kolejna karta znajdzie się pod A. (teraz pstwo to $\frac{2}{52}$, więc powinno się to stać po 26 krokach)



lub

Pod A mamy $\begin{smallmatrix}B\\C\end{smallmatrix}$ lub $\begin{smallmatrix}C\\B\end{smallmatrix}$.

Obie te możliwości są równie prawdopodobne. Potem trafi pod A następna karta i znowu karty pod nią są dobrze potasowane.



Niech X_i – czas, który kartę A spędza na i-tej pozycji. $\mathbb{E}X_i =$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_{52}] = \sum_{i=1}^{52} \mathbb{E}X_i = 52 + \frac{52}{2} + \ldots + 1 =$$

$$= 52\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{52}\right) = 52 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{52} \frac{1}{i}}_{\log 52 + \gamma} \sim 52 \cdot (\log 52 + \gamma)$$

~ 235

stała eulera

Definicja 5.8 Niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Liczbę

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}X]^2\right)$$

nazywamy **wariancją** zmiennej losowej X. Pierwiastek z wariancji nazywamy **odchyleniem standardowym**

$$\sigma = \sqrt{\operatorname{Var} X}.$$

Tw. 5.9 X - zm. los. t. że $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Wtedy

1. $\operatorname{Var} X < \infty$
2. $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$
3. $\operatorname{Var} X \geqslant 0$
4. $\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X$
5. $\operatorname{Var}(X+a) = \operatorname{Var} X$
6. $\operatorname{Var} X = 0 \iff \mathbb{P}[X = c] = 1$ dla pewnego c
7. Jeżeli X, Y nzl., to $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$

D-d. 7. $\operatorname{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[X+Y - \mathbb{E}(X+Y)]^2 =$

$$\overset{(2)}{=} \mathbb{E}(X+Y)^2 - (\mathbb{E}(X+Y))^2 = \mathbb{E}X^2 + 2\mathbb{E}X\cdot Y + \mathbb{E}Y^2$$
$$-(\mathbb{E}X)^2 - 2\mathbb{E}X\cdot Y - (\mathbb{E}Y)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 +$$
$$+ \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$$

$\blacksquare$

Jeżeli X ma rozkład dyskretny

$\mathbb{P}[X = x_i] = p_i$, $m = \mathbb{E}X = \sum x_i p_i$, to

$$\operatorname{Var} X = \sum p_i (x_i - m)^2 = \left(\sum p_i x_i^2\right) - m^2$$

Jeżeli X ma rozkład abs. ciągły z gęstością g, $m = \mathbb{E}X = \int x g(x)\,dx$, to

$$\operatorname{Var} X = \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 g(x)\,dx - m^2$$

<u>Przykład</u> X ma rozkład dwumianowy z par. n i p, $X \sim Bin(n,p)$.

Zdefiniujmy $X_i = \begin{cases} 1 & \text{w } i\text{-tym sukces} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

Wtedy $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. X_i są niezależne,

$\mathbb{P}[X_i = 0] = 1-p$, $\mathbb{P}[X_i = 1] = p$.

$\mathbb{E}X_i = p$, $\operatorname{Var} X_i = \mathbb{E}X_i^2 - (\mathbb{E}X_i)^2 =$

$= p - p^2 = p(1-p)$

$\mathbb{E}X = \sum \mathbb{E}X_i = n \cdot p$

$$\operatorname{Var} X \underset{\substack{\uparrow \\ \text{niezależność}}}{=} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i = np(1-p)$$

Przykład Załóżmy, że zmienna losowa X ma rozkład $X \sim \mathrm{Geom}(p)$, tzn. $\mathbb{P}[X=k] = p(1-p)^{k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy, że X oznacza moment pierwszego sukcesu w nieskończonym schemacie Bernoulliego. Wówczas

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$

$$\mathrm{Var}\, X = \frac{1-p}{p^2}$$

Przykład Jeżeli $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, to

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{y=(x-m)/\sigma}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\sigma y + m) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = m$$

f. niep. więc całka $= 0$

$$\mathrm{Var}\, X = \mathbb{E}(X-m)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sigma^2 y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-y e^{-\frac{y^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} =$$

$$= \sigma^2$$

<u>Przykład</u> Zmienna losowa ma rozkład Cauchy'ego, jeżeli jej rozkład jest zadany gęstością $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

Zauważmy, że wówczas zmienna losowa nie posiada wartości oczekiwanej:

$$\mathbb{E}|X| = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} |x| \cdot \frac{1}{1+|x|^2}\,dx = \infty$$

<u>Definicja 5.10</u> Niech X będzie d-wymiarową zmienną losową. Wówczas wektor

$$\mathbb{E}X = (\mathbb{E}X_1, \mathbb{E}X_2, \dots, \mathbb{E}X_d)$$

nazywamy **wartością oczekiwaną** zmiennej losowej X, o ile $\mathbb{E}X_i$ istnieją.

<u>Tw. 5.11</u>

1. $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$
2. d-wymiarowa zmienna losowa ma wartość oczekiwaną $\Leftrightarrow \mathbb{E}|X| < \infty$
3. $|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$

D-d. 3 Niech v będzie dowolnym wektorem o długości 1. Wtedy

$$\langle \mathbb{E}X, v\rangle = \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}X_j v_j = \mathbb{E}\langle X, v\rangle \leq \mathbb{E}|X|\cdot|v| = \mathbb{E}|X|$$

Przyjmując $v = \frac{\mathbb{E}X}{|\mathbb{E}X|}$ otrzymujemy tezę.

Definicja 5.12 Niech X, Y będą zm. los. takimi, że $\mathbb{E}X^2, \mathbb{E}Y^2 < \infty$. Liczbę

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]$$

nazywamy **kowariancją** X i Y. Jeżeli $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, to X i Y są **nieskorelowane**.

Uwaga. Kowariancja jest skończona.

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| = |\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]| \leq$$

$$\leq \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2}}_{\sqrt{\mathrm{Var}X}} \cdot \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}(Y-\mathbb{E}Y)^2}}_{\sqrt{\mathrm{Var}Y}} < \infty$$

Tw. 5.13 Jeżeli $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, $\mathbb{E}Z^2 < \infty$, to

1. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$
2. $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}\,X$
3. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
4. $\mathrm{Cov}(aX+bY, Z) = a\,\mathrm{Cov}(X,Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y,Z)$
5. Jeżeli X, Y niezależne, to $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

   ALE implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Tw. 5.14 Jeżeli $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$ dla $i = 1, \dots, n$, to

$$\mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\,X_k + 2\sum_{k<l} \mathrm{Cov}(X_k, X_l)$$

W szczególności, jeżeli X_i są parami nieskorelowane, to $\mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\,X_k$

Przykład Niech σ będzie losową permutacją liczb $1, \dots, n$ i niech X oznacza liczbę punktów stałych σ. Oblicz $\mathrm{Var}\,X$.

Niech $X_i = \begin{cases} 1 & i \text{ jest pkt. stałym} \\ 0 & \text{w p.w.} \end{cases}$

Wtedy $X = \sum X_i$. $\mathbb{E}X_i = \frac{1}{n}$, $\mathbb{E}X = 1$

Zmienne X_i są zależne!

$$\operatorname{Var} X_i = \mathbb{E}X_i^2 - (\mathbb{E}X_i)^2 = \mathbb{E}X_i - (\mathbb{E}X_i)^2 =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}.$$ Dla $i \neq j$:

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}X_iX_j - \mathbb{E}X_i \cdot \mathbb{E}X_j = (*)$$

$$\mathbb{E}X_iX_j = 0 \cdot \mathbb{P}[X_iX_j = 0] + 1 \cdot \mathbb{P}[X_iX_j = 1] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

$$\operatorname{Var} X = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var} X_k + 2\sum_{k<l} \operatorname{Cov}(V_k, V_l) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-1}{n^2} + 2\sum_{k<l} \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} \right) =$$

$$= \frac{n-1}{n} + \cancel{2} \cdot \frac{n(n-1)}{\cancel{2}} \cdot \frac{n-(n-1)}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = \underline{1}$$