27.03.2021

Def. 4.1 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - p. prob. **Zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}^d$** nazywamy dowolną funkcję mierzalną $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$.

Jeżeli $d=1$, to powyższa definicja opisuje zmienną losową z poprzedniego wykładu.

Przykład Wylosowano 13 kart z 32.

Niech X_1 oznacza liczbę pików, a X_2 liczbę kierów. Wówczas $X = (X_1, X_2)$.

Podstawowe własności wielowymiarowych zmiennych losowych są analogiczne do zwykłych zmiennych losowych. Np.:

- jeżeli X_1, X_2 są d-wymiarowymi zmiennymi losowymi, to $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$ też
- jeżeli $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ mierzalne, to $\Phi(X)$ jest k-wymiarową zm. los.

Definicja 4.2 **Rozkładem** d-wymiarowej zmiennej losowej X nazywamy miarę prob.

$$\mu(B) = \mathbb{P}[X \in B] = \mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) \in B\}].$$

Wówczas $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ jest p. prob.

Definicja 4.3 **Dystrybuantą** d-wymiarowej zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ zadaną wzorem

$$F(t_1, \dots, t_d) = \mu\big((-\infty, t_1] \times (-\infty, t_2] \times \dots \times (-\infty, t_d]\big)$$
$$= \mathbb{P}[X_1 \leq t_1, \dots, X_d \leq t_d]$$

TW. 4.4 F - dystrybuanta X. Wtedy

1. jeżeli $x_i \to -\infty$ dla pewnego i, to
$$F(x_1, \dots, x_d) \to 0$$
2. jeżeli $x_i \to \infty$ dla pewnego i, to
$$F(x_1, \dots, x_d) \to 1$$

3. dystrybuanta X jedn. wyznacza rozkład.

Definicja 4.5 d-wym. zm. los. X ma **rozkład dyskretny**, jeżeli istnieje przeliczalny zbiór S taki, że $\mu(S)=1$. Wtedy istnieją ciągi $p_1, p_2, \ldots \in (0,1]$, $s_1, \ldots \in \mathbb{R}^d$ t. że

$$\sum p_i = 1, \quad \mathbb{P}[X = s_i] = p_i$$

Definicja 4.6 d-wymiarowa zm. los. X ma **rozkład absolutnie ciągły**, jeżeli istnieje funkcja borelowska $f: \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ t. że

$$\mathbb{P}[X \in B] = \mu(B) = \int_B f(x)\,dx, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Wówczas

$$F(t_1, \ldots, t_d) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_d} f(x_1, \ldots, x_d)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_d$$

Ponadto, jeżeli $F \in C^d(\mathbb{R}^d)$, to

$$f(x_1, \ldots, x_d) = \frac{\partial^d F}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_d}(x_1, \ldots, x_d)$$

Przykład. W urnie są 2 kule czerwone, 5 białych i 3 zielone. Wybieramy losowo 3 kule (jedn.). X_1 oznacza # białych kul, X_2 # kul czerwonych. Wówczas (X_1, X_2) jest 2-wymiarową zmienną losową i rozkład dyskretny:

$X_1 \setminus X_2$	0	1	2	$\mathbb{P}[X_1 = x]$
0	$\frac{1}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{10}{120}$
1	$\frac{15}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{5}{120}$	$\frac{50}{120}$
2	$\frac{30}{120}$	$\frac{20}{120}$	0	$\frac{50}{120}$
3	$\frac{10}{120}$	0	6	$\frac{10}{120}$
$\mathbb{P}[X_2 = y]$	$\frac{56}{120}$	$\frac{56}{120}$	$\frac{8}{120}$	1

$$\underline{\mathbb{P}[X_1 \leq X_2]} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}[X_1 = 1 \mid X_1 \leq X_2] = \frac{\underline{\mathbb{P}[X_1 = 1 \text{ i } X_1 \leq X_2]}}{\mathbb{P}[X_1 \leq X_2]} = \frac{7}{9}$$

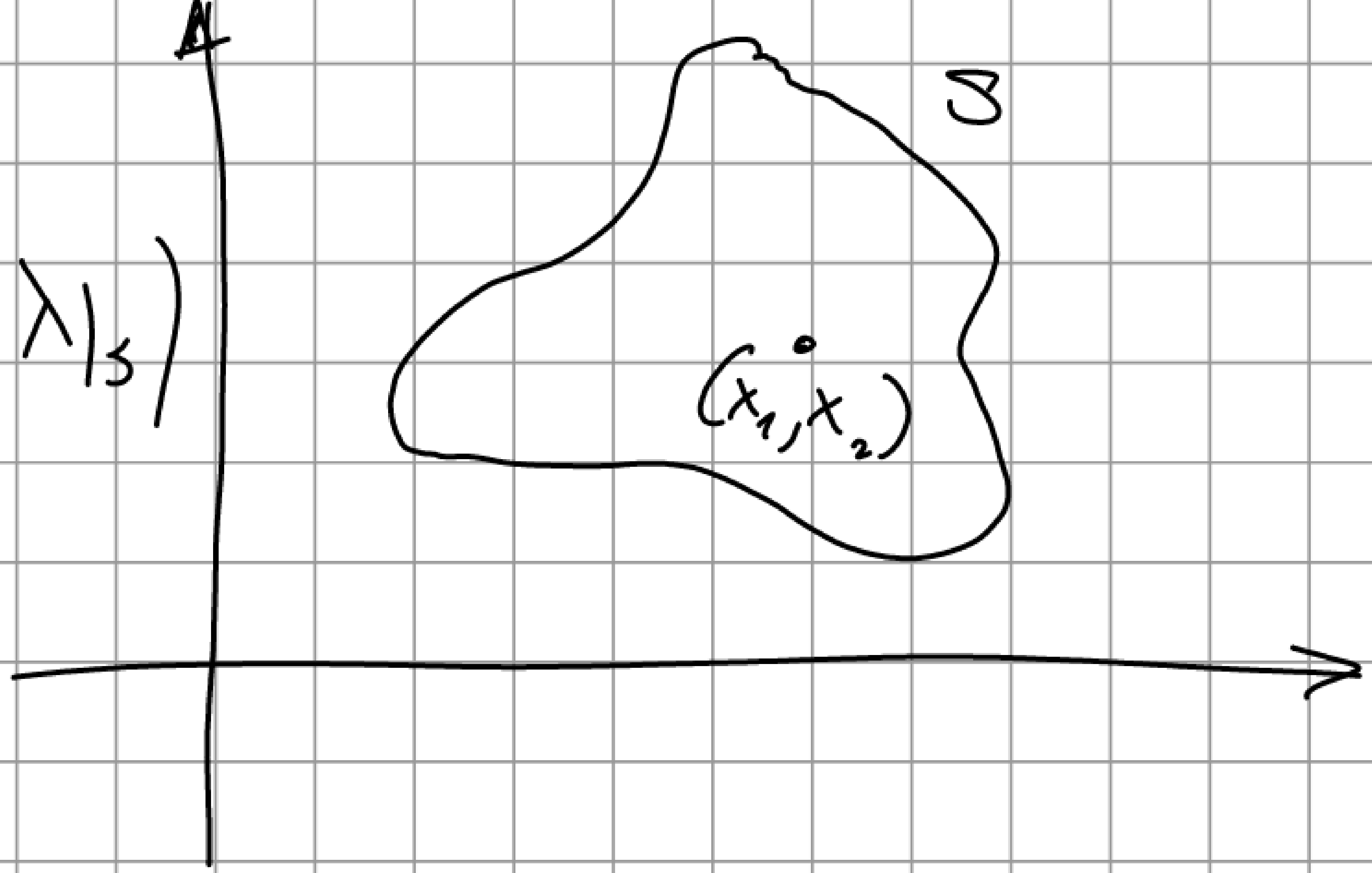
Wniosek: znajomość rozkładu X_1, X_2 nie daje nam jeszcze rozkładu (X_1, X_2).

Przykład.

$\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \frac{1}{\lambda(S)}\lambda|_S\right)$

↑

p. prob.



$$\mathbb{P}[(x_1, x_2) \in A] = \frac{\lambda(A \cap S)}{\lambda(S)}$$

↗

zm. losowe

$X(\omega) = \omega$ Rozkład identyczności to po prostu miara przestrzeni.

Przykład. Rozkład Gaussa (normalny) na $\mathbb{R}^d$,

$\mathcal{N}(m, A^{-1})$: m – ustalony wektor w $\mathbb{R}^d$,

A – macierz $d \times d$, symetryczna, dodatnio określona

(forma kw. określona przez A jest ilocz. skalarnym) gęstość: $f(x) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\underbrace{\langle (x-m),(x-m)\rangle}_{\text{iloczyn skalarny zadany przez } A}}$

Widać, że $f(x) \geq 0$.

Trzeba sprawdzić, że $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = 1$

Macierz $A = B\underset{\substack{\uparrow \\ \text{diagonalna}}}{D}\underset{\substack{\nwarrow \\ \text{izometria}}}{B^{-1}}$

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_d \end{bmatrix}, \quad a_i > 0$$

Podstawiając $x - m = By$ otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \underbrace{\frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}}_{\overset{\shortparallel}{C}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\langle By, By\rangle} |\det B|\, dy =$$

$$= C\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2} y^t D y}\, dy = C\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} a_i y_i^2}\, dy =$$

$$= C\prod_{i=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2} a_i y_i^2}\, dy_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{d}} \prod_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 1$$

Definicja 4.7 $X=(X_1,\dots,X_d)$. Wówczas dla $k\leq d$ rozkład X_k nazywamy **rozkładem brzegowym** X.

UWAGA: jeśli znamy wyłącznie rozkłady brzegowe, to cały rozkład nie wynika z nich jednoznacznie.

Definicja 4.8 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ – p. prob., $\{X_i\}_{i\in I}$ rodzina zmiennych losowych. Zmienne te są **niezależne**, jeżeli $\sigma(X_i)$ (σ-ciało generowane przez X_i) są niezależne.

$$\left[\ \sigma(X) = \sigma\left(\{X^{-1}[B]\}_{B\in\mathcal{B}or(\mathbb{R})}\right)\subseteq\mathcal{F}\ \right]$$

Innymi słowy, $\{X_i\}_{i\in I}$ są niezależne, gdy dla dowolnych, parami różnych $i_1, i_2,\dots,i_n\in I$ oraz dowolnych $B_1,\dots,B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ zachodzi

$$\mathbb{P}[X_{i_1}\in B_1,\dots,X_{i_n}\in B_n]=\mathbb{P}[X_{i_1}\in B_1]\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}[X_{i_n}\in B_n]$$

Disclaimer: $\sigma(X)$ to najmniejsze σ-ciało zawarte w $\mathcal{F}$, w którym X jest mierzalne: $X:(\Omega, \sigma(X)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$

Przykład. Rozważmy schemat Bernoulliego i zdefiniujmy

$$X_i(\omega) = X_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy sukces w } i\text{-tej} \\ 0 & \neg \end{cases}$$

Wówczas $X_1, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

$$\mathbb{P}[X_1 = 1, X_2 = 0] = \mathbb{P}[\{(w_1, w_2) : X_1(w) = 1, X_2(w) = 0\}]$$

$$= \mathbb{P}[X_1(w) = 1] \cdot \mathbb{P}[X_2(w) = 0]$$

$\uparrow$

wynika z tego, że X_1, X_2 są f. char. niezależnych zdarzeń.

Tw. 4.9 Niech $X_1, \dots, X_n$ będą zmiennymi losowymi, $X = (X_1, \dots, X_n)$. NWSR:

1. $X_1, \dots, X_n$ są niezależne.
2. dla dowolnych $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ zdarzenia $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$ są niezależne.
3. $\mu_X = \mu_{X_1} \otimes \mu_{X_2} \otimes \dots \otimes \mu_{X_n}$
4. $F_X(t_1, \dots, t_n) = F_{X_1}(t_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(t_n)$

D-d.

- $1 \Leftrightarrow 2$ z def.
- $2 \Rightarrow 4$ $B_i = (-\infty, t_i]$

$$F_X(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}[X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n] =$$
$$= \mathbb{P}[\{X_1 \in B_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\}] \overset{(2)}{=} \mathbb{P}[X_1 \in B_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[X_n \in B_n].$$

- $4 \Rightarrow 3$ Niech X' – zm. los. o rozkładzie $\mu_{X_1} \otimes \dots \otimes \mu_{X_n}$. Pokażemy $F_X = F_{X'}$. $(\Rightarrow \mu_X = \mu_{X'})$

$$F_{X'}(t_1, \dots, t_n) = \mu_{X_1} \otimes \dots \otimes \mu_{X_n}((-\infty, t_1] \times \dots \times (-\infty, t_n]) =$$

$$= \mu_{X_1}((-\infty, t_1]) \cdot \dots \cdot \mu_{X_n}((-\infty, t_n]) =$$

$$= F_{X_1}(t_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(t_n) \overset{4}{=} F_X(t_1, \dots, t_n)$$

- $3 \Rightarrow 2$

$$\mathbb{P}[X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n] = \mu_X(B_1 \times \dots \times B_n) \overset{(3)}{=}$$

$$= \mu_{X_1}(B_1) \cdot \dots \cdot \mu_{X_n}(B_n) =$$

$$= \mathbb{P}[X_1 \in B_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[X_n \in B_n]$$

■

Wniosek 4.10 Zmienne losowe $X_1, \dots, X_n$ mające rozkłady dyskretne są niezależne iff dla dowolnych $s_1 \in S_{X_1}, \dots, s_n \in S_{X_n}$ zachodzi

$$(*) \quad \mathbb{P}[X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n] = \mathbb{P}[X_1 = s_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[X_n = s_n]$$

Dowód. Jeżeli zmienne losowe $X_1, \dots, X_n$ są niezależne to $(*)$ jest prawdziwa.

Implikacja odwrotna (dla uproszczenia $n=2$):

Korzystając z (*) otrzymujemy dla dowolnych zbiorów borelowskich B_1, B_2:

$$\mathbb{P}[X_1 \in B_1, X_2 \in B_2] = \mathbb{P}[X_1 \in B_1 \cap S_{X_1}, X_2 \in S_2 \cap S_{X_2}]$$

$$= \sum_{\substack{x_1 \in B_1 \cap S_{X_1} \\ x_2 \in B_2 \cap S_{X_2}}} \mathbb{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2] =$$

$$= \sum_{x_1 \in B_1 \cap S_{X_1}} \sum_{x_2 \in B_2 \cap S_{X_2}} \mathbb{P}[X_1 = x_1] \mathbb{P}[X_2 = x_2] =$$

$$= \mathbb{P}[X_1 \in B_1] \cdot \mathbb{P}[X_2 \in B_2]$$

Wniosek 4.11 Zmienne losowe $X_1, \dots, X_n$ o gęstościach $f_1, \dots, f_n$ są niezal. iff zmienna losowa $X = (X_1, \dots, X_n)$ ma gęstość

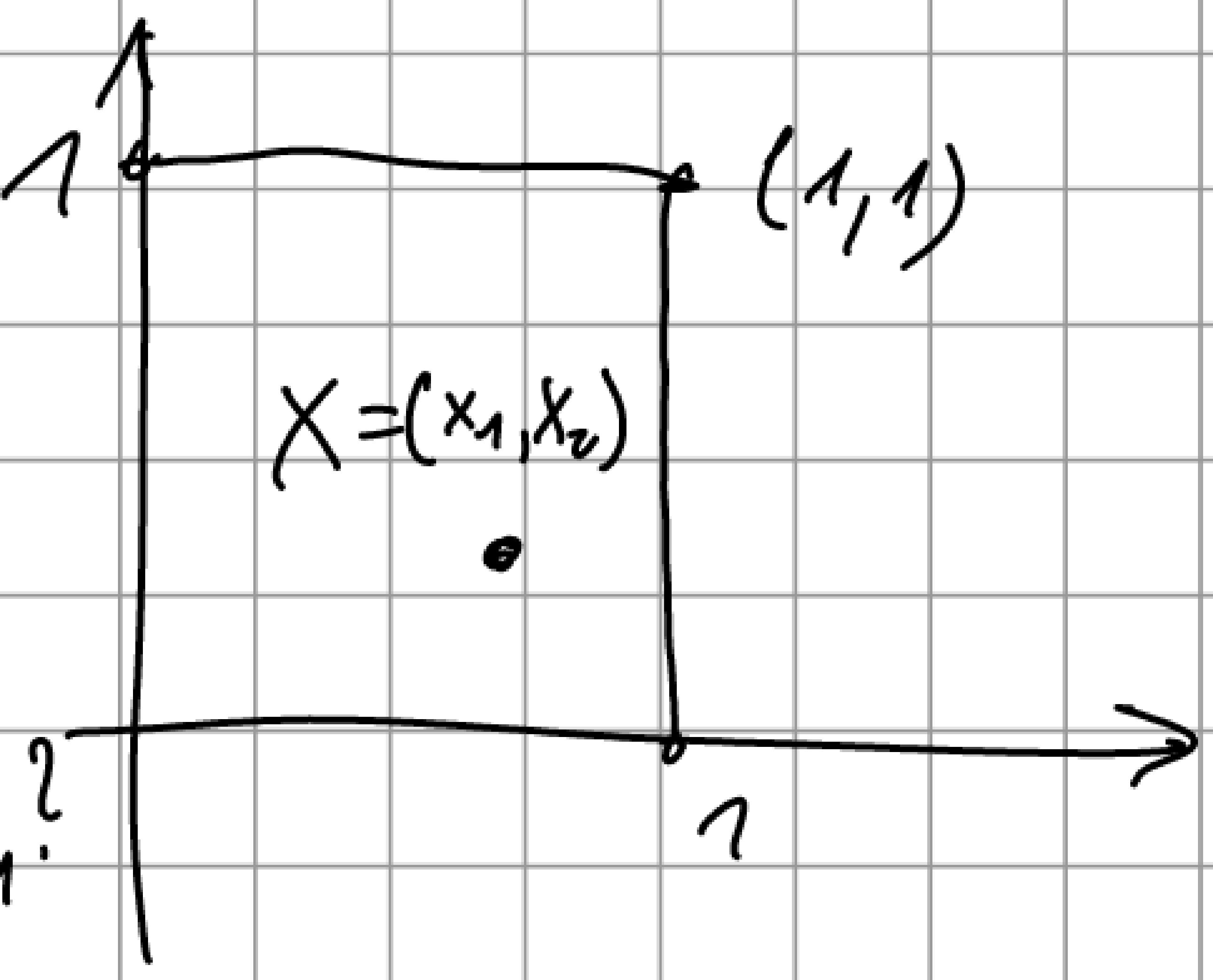
$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$$

Przykład. Niech $X = (X_1, X_2)$ będzie losowym punktem z kwadratu $[0,1] \times [0,1]$. Czy zmienne X_1, X_2 są niezależne?

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1]^2, \mathcal{B}or([0,1]^2), \lambda)$

$f_X(x_1, x_2) =$

$= 1 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x_1, x_2)$



Jak wygląda gęstość X_1?

$A \in \mathcal{B}([0,1])$

$\mathbb{P}[X_1 \in A] = \lambda[(X_1, X_2) \in A \times [0,1]] =$

$= \lambda[A] = \int_A 1\,dx \Rightarrow f_{X_1}(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

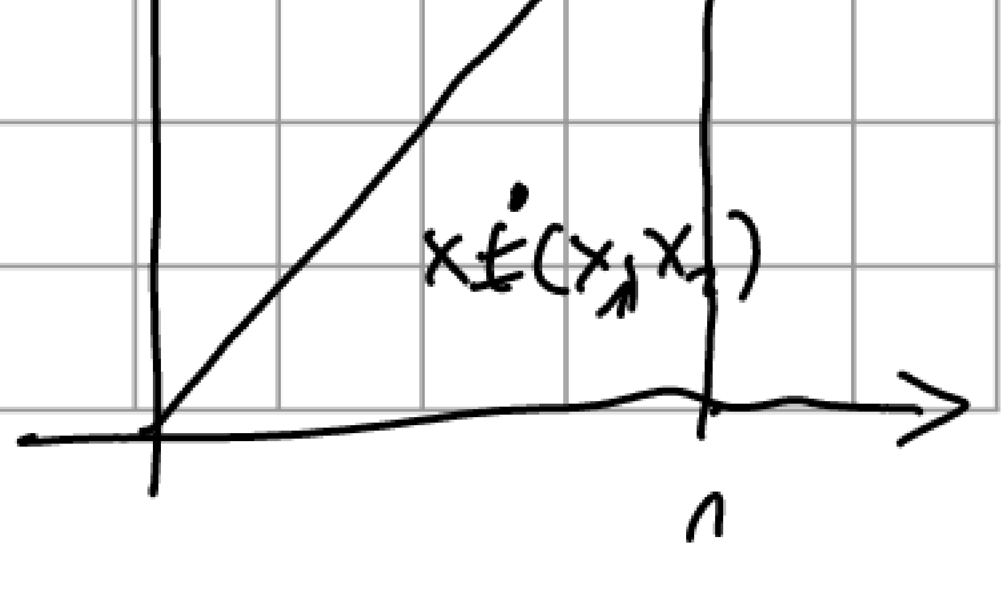
Analogicznie $f_{X_2}(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

Mamy $f_X = f_{X_1} f_{X_2} \Rightarrow X_1, X_2$ niezależne

Przykład. Niech $X = (X_1, X_2)$ będzie losowym punktem w trójkącie $\{(x_1, x_2) : 0 \le x_2 \le x_1 \le 1\}$.

Czy X_1, X_2 niezależne?

$$f_X((x_1, x_2)) = \begin{cases} 2 & 0 \le x_2 \le x_1 \\ 0 & \text{poza} \end{cases}$$



trochę nadużycie

Dla $A \in [0,1]$ $\quad \mathbb{P}[X_1 \in A] = \mathbb{P}[(X_1,X_2) \in A \times \mathbb{R}] =$

$$= \int_{A\times\mathbb{R}} f_X(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_A \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1 =$$

Tw. Fubiniego

$$= \int_A \int_0^{x_1} 2\,dx_2\,dx_1 = \int_A \underbrace{2x_1}_{\substack{\shortparallel \\ f_{X_1}(x_1)}}\,dx_1$$

Teraz $\quad \mathbb{P}[X_2 \in A] = \int_A \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 =$

$$= \int_A \int_{x_2}^{1} 2\,dx_1\,dx_2 = \int_A \underbrace{2(1-x_2)}_{\substack{\shortparallel \\ f_{X_2}(x_2)}}\,dx_2$$

$$f_X\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = 2$$

$$f_{X_1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1, \quad f_{X_2}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

$f_X \neq f_{X_1} \cdot f_{X_2} \Rightarrow X_1, X_2$ nie są niezależne.

TW. 4.12 Załóżmy, że X_1, X_2 są nzl. zm. los. o rozkładach ciągłych z gęstościami f_1, f_2. Wówczas zmienna losowa $X_1 + X_2$ ma rozkład z gęstością

$$f(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) f_2(y) dy$$

Funkcję f nazywamy **splotem** f_1, f_2.

$$\{a_n\}, \{b_n\}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

To jest splot
