10.03.2021

Lemat 2.11 $A_1, \dots, A_n$ - zdarzenia niezależne. Wtedy σ-ciała $\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_n)$ $(\sigma(A_i) = \{\emptyset, A_i, A_i^c, \Omega\})$ również są niezależne.

Wniosek 2.12 Jeżeli $A_1, \dots, A_n$ są niezależne, to

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right] =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}[A_i])$$

Problem Przeprowadzamy n doświadczeń. Są one niezależne (tak życiowo, nie algebraicznie). i-te jest opisane przez $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$.
(np. $X_1, \dots, X_{10}$ - wyniki 10 rzutów kostką)
ale problem, bo one są określone na różnych przestrzeniach. Jak to łączyć?

Cel: Chcielibyśmy zdefiniować jedną dużą przestrzeń i jeszcze jakoś przemycić informację o niezależności naszych doświadczeń.

Kolejny problem: Chcemy przejść z n do nieskończoności, określić jakieś nieskończone ciągi doświadczeń.

Rozwiązanie celu: na razie n-skończone.

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$$

$$\mathcal{F}_i' = \{\Omega_1 \times \ldots \times \underset{i\text{-ta wsp.}}{A} \times \ldots \times \Omega_n : A \in \mathcal{F}_i\}$$

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_1', \ldots, \mathcal{F}_n') = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n$$

Szukamy $\mathbb{P}$: powinna spełniać:

$$\mathbb{P}[A_1 \times \ldots \times A_n] = \mathbb{P}[A_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[A_n]$$

Wiemy, że miara produktowa spełnia te warunki!

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_n$$

Miara produktowa w końcu ma sens...

<u>Przykład</u> (Bernoulli) Wykonamy n-krotnie to samo doświadczenie, w którym pstwo sukcesu wynosi p. Kolejne próby są niezależne. Wówczas p-stwo sukcesu w $\underbrace{k}_{\text{dokładnie}}$ próbach wynosi $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

<u>D-d.</u> $\Omega_i = \{0,1\}$, $\mathcal{F}_i$, $\mathbb{P}_i[\{1\}] = p$.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ustalmy $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$

$$\mathbb{P}_1[\{\omega_1\}] = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1}$$

$$\mathbb{P}[\{\omega\}] = \prod_{i=1}^{n} p^{\omega_i}(1-p)^{1-\omega_i} =$$

$$= p^{\sum \omega_i}(1-p)^{n-\sum \omega_i}$$

A_k — zdarzenie które mówi, że było k sukcesów.

$$A_k = \{\omega : \sum \omega_i = k\}.$$

$$\mathbb{P}[A_k] = \sum_{\omega \in A_k} \mathbb{P}[\{\omega\}] =$$

$$= \sum_{\omega \in A_k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= |A_k|\, p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pytanie: co gdy $n = \infty$? Chcemy zdefiniować p. prob. opisującą nieskończone ciągi niezależnych doświadczeń!

TW. 2.13 (Kołmogorowa)

Załóżmy, że dany jest ciąg miar $\mathbb{P}_n$ na $(\mathbb{R}^n, Bor(\mathbb{R}^n))$ spełniający warunek zgodności

$$\mathbb{P}_{n+1}[A_1 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{R}] = \mathbb{P}_n[A_1 \times \ldots \times A_n].$$

Wówczas istnieje jedyna miara probabilistyczna $\mathbb{P}$ na $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, Bor(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ ($Bor(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ jest generowane przez „skończenie" wymiarowych kostkach) taka, że

$$\mathbb{P}[A_1 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots] = \mathbb{P}_n[A_1 \times \ldots \times A_n]$$

Przykład Zamierzamy skonstruować przestrzeń prob. na której można zdefiniować ciąg niezależnych zdarzeń $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ takich, że $\mathbb{P}[A_n] = 1/2$

Szukamy p. prob. na której zdef. ∞ ciąg niezależnych rzutów monetą.

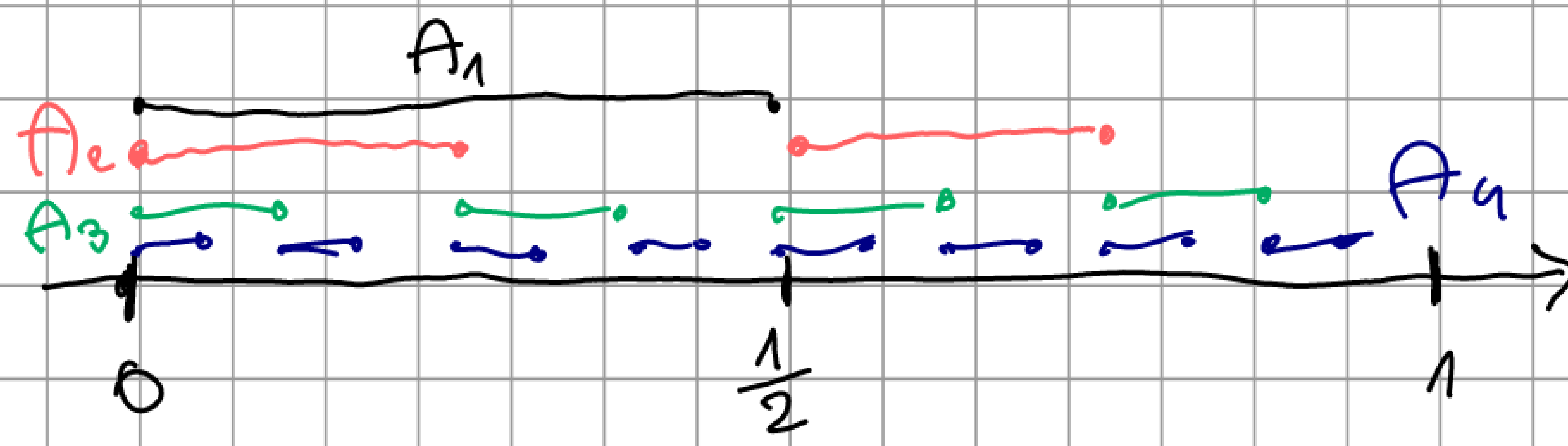
$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \left([0,1], \mathcal{B}or([0,1]), \overset{\lambda}{\overset{\shortparallel}{Leb}}\right)$$

$$\omega \in [0,1], \quad \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2^i} = 0,\omega_1\omega_2\ldots$$

(nie jest jedn.: $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$)

(Ale takich liczb jest przeliczalnie wiele więc mamy to gdzieś)

$$A_n = \{\omega \in [0,1] : \omega_n = 0\}$$



$\lambda(A_n) = \frac{1}{2}$. Zadanie: $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ są niezależne

Def. 3.1 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob., $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ciąg zdarzeń. **Granicą górną** ciągu $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy zdarzenie

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$

Kiedy $\omega \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$? gdy $\forall m$ $\omega \in \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$, czyli ω należy do nieskończonej liczbie zdarzeń.

Lemat 3.2. (Borela – Cantelliego)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob., $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$.

1. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$, to
$$\mathbb{P}[\limsup_n A_n] = 0$$
tzn. z p-stwem 1 zachodzi tylko skończenie wiele z A_n.

2. Jeżeli $A_1, \ldots$ są niezależne oraz $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \infty$, to $\mathbb{P}[\limsup_n A_n] = 1$.

tzn. z p-stwem 1 zachodzi ∞ wiele zdarzeń A_n.

D-d

1. $\mathbb{P}\left[\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right] \leq \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=M}^{\infty} A_n\right] \leq$

$\leq \sum_{n=M}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] \xrightarrow{M\to\infty} 0$

(z def. zbieżności szeregu)

2. Wystarczy, że

$0 = \mathbb{P}[(\limsup A_n)^c] =$

$= \mathbb{P}\left[\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right)^c\right] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right]$

Wystarczy pokazać, że

$\forall m \quad \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right] = 0$

Korzystamy kolejno z tw. o ciągłości, niezależności zbiorów A_n oraz nierówności $1-x \leq e^{-x}$:

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=m}^{k} A_n^c\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \prod_{n=m}^{k} \mathbb{P}[A_n^c] = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=m}^{k} (1-\mathbb{P}[A_n])$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} e^{-\sum_{n=m}^{k} \mathbb{P}[A_n]} = e^{-\sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}[A_n]} = 0$$

$\blacksquare$

<u>Przykład</u> Ω, A_i – w i-tym rzucie 6.

$$\mathbb{P}[A_i] = \frac{1}{6}. \quad \sum \mathbb{P}[A_i] = \infty.$$

Z lematu B-C

$$\mathbb{P}[A_n \underbrace{\text{i.o.}}_{\text{infinitly often}}] = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\mathbb{P}[\limsup_n A_n] = 1\right)$$

(czyli w ciągu zdarzeń z pstwem 1 zachodzi nieskończenie wiele z nich)

<u>Przykład</u> Uzasodnić, że jeżeli będziemy rzucać odpowiednio długo kostką, to z pstwem 1 wyrzucimy w kolejnych

punktach ciąg złożony z kolejnych 10 jedynek i kolejnych 10 szóstek.

$\Omega = \{1, \dots, 6\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $\mathbb{P}$

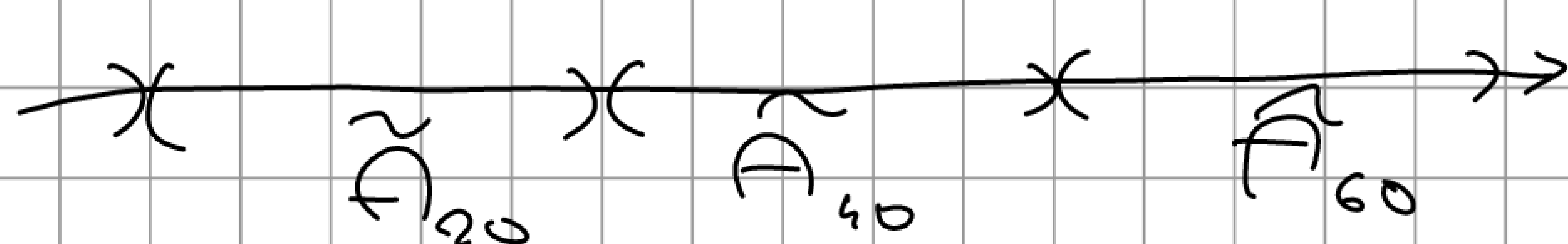
$$A_n = \{\omega : \omega_n = \dots = \omega_{n+9} = 1, \ \omega_{n+10} = \dots = \omega_{n+19} = 6\}$$

$$\mathbb{P}[A_n] = \frac{1}{6^{20}}. \quad \sum \mathbb{P}[A_n] = \infty.$$

Problem: A_n są zależne!

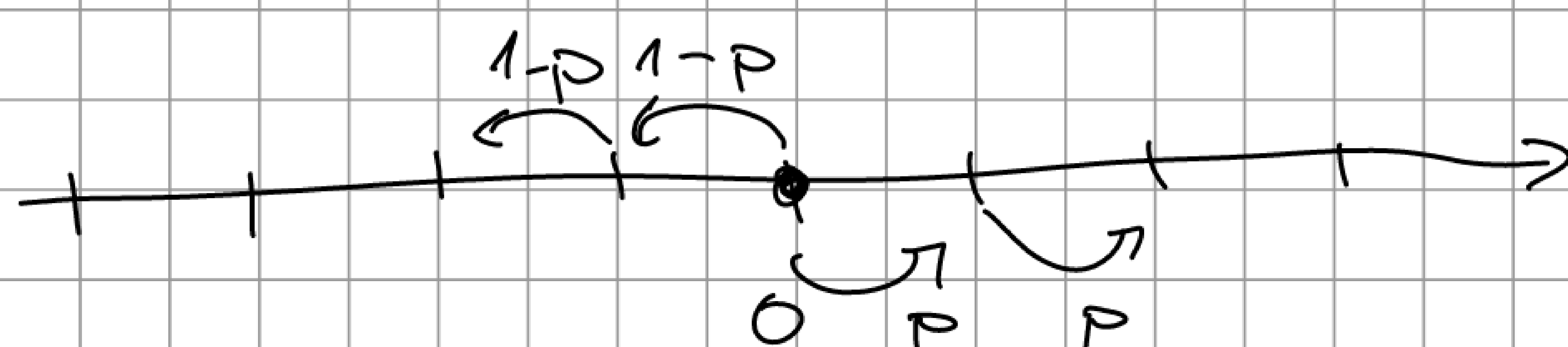
$\tilde{A}_n = A_{20n}$. Zdarzenia $\{\tilde{A}_n\}$ są niezależne. $\mathbb{P}[\tilde{A}_n] = \frac{1}{6^{20}}$.

Z lem. B-C $\mathbb{P}[\tilde{A}_n \text{ i.o.}] = 1$



$\leadsto \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = 0$, $\mathbb{P}[A_1]\mathbb{P}[A_2] = \left(\frac{1}{6^{20}}\right)^2$

Przykład Rzucamy ∞ wiele razy niesymetryczną monetą. Niech A_n oznacza zdarzenie, że w pierwszych n rzutach wypadło tyle samo orłów co reszek) Pokaż że z p-stwem 1 zachodzi jedynie skończenie wiele zdarzeń A_n.



Spacer losowy — z pstwem p idziemy w prawo, $1-p$ w lewo. Przykład mówi o tym, że 0 odwiedzimy skończenie wiele razy.

Obs. 1: $\mathbb{P}[A_{2n+1}] = 0$ (oczywiste)

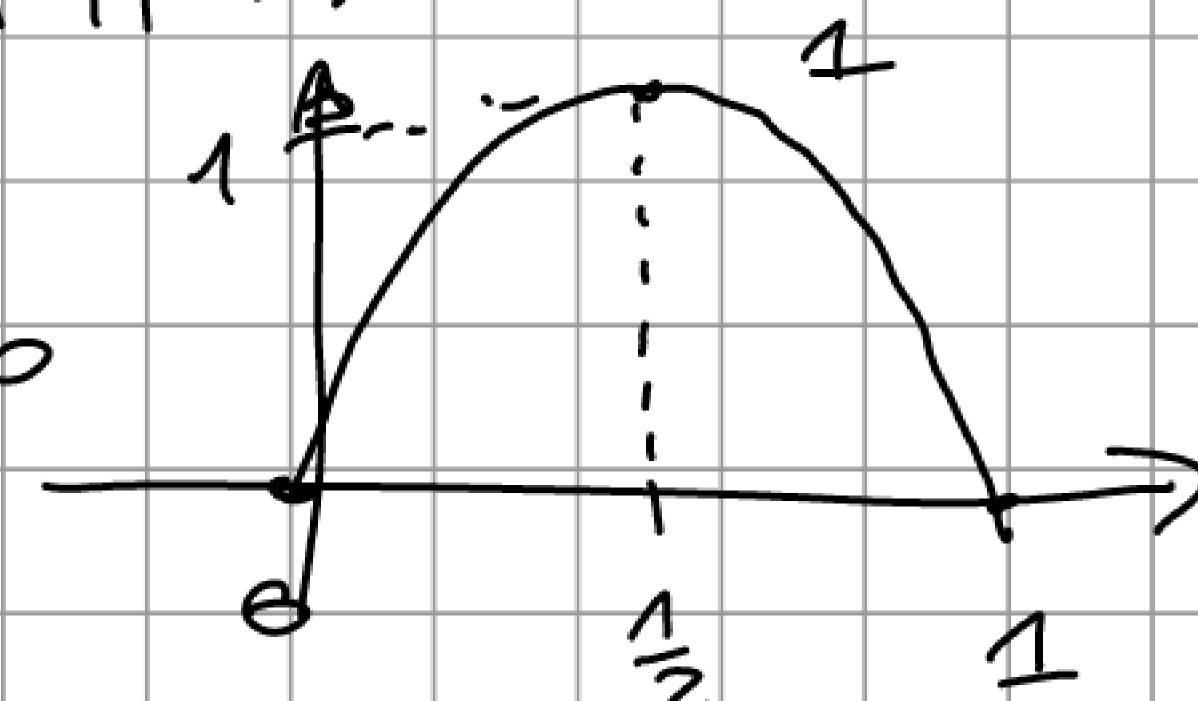
Obs. 2: $\mathbb{P}[A_{2n}] = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$

(Wzór Stirlinga: $n! \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$)

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sqrt{2n}}{n}\,\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\mathbb{P}[A_{2n}] \sim \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} < \infty$$



Z lem. B–C dla $p \neq \frac{1}{2}$ $p(1-p) < 1$

$$\mathbb{P}[A_n \text{ i.o.}] = 0$$

$$\Downarrow$$

A_n musi zajść skończenie wiele razy.

Def. 3.3 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - p. prob.

Zmienną losową nazywamy dowolną mierzalną funkcję $X: \Omega \to \mathbb{R}$.

(Czyli dla dowolnego $B \in Bor(\mathbb{R})$ mamy $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$)

Przykład

- Rzucamy 5 razy kostką i chcemy obliczyć sumę wyników (nie interesują nas konkretne wyniki, tylko suma). Wówczas $\Omega = \{(i_1, \dots, i_5), i_j \in \{1, \dots, 6\}\}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_5)$ oraz $X(\omega) = \omega_1 + \dots + \omega_5$ jest zmienną losową.
- X - wartość wygranej w totku
- X - cena ...

Uwagi:

- Ω: skończony, to dla $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ każde odwzorowanie $X: \Omega \to \mathbb{R}$ jest mierzalne
- X jest zmienną losową jeżeli dla każdego t $X^{-1}((-\infty, t]) \in \mathcal{F}$

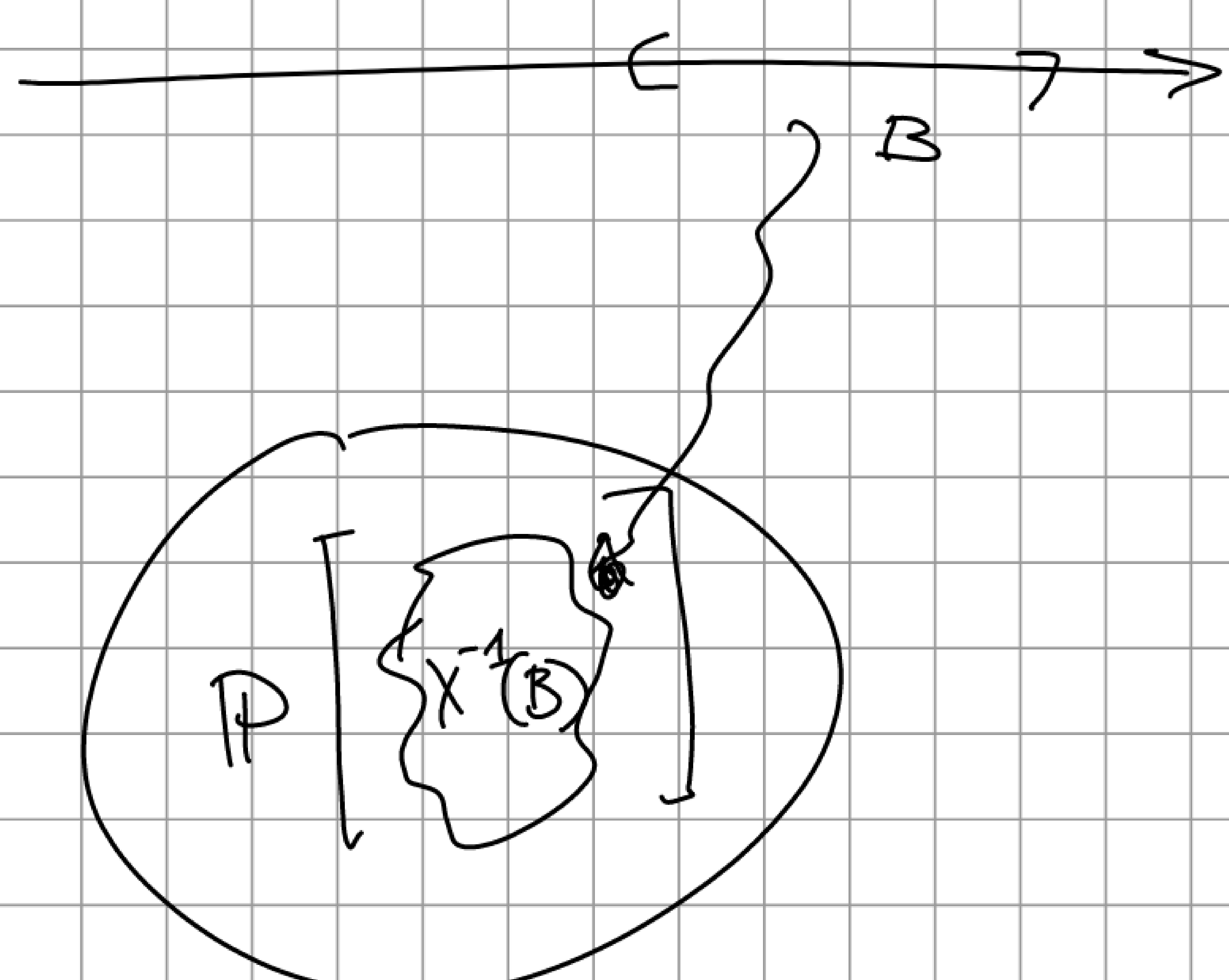
TW. 3.4 Jeżeli $X_1, X_2, \ldots$ są zmiennymi losowymi

1. $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$, $X_1 \cdot X_2$, $X_1 \setminus X_2$ $(X_2 \neq 0)$ są zmiennymi losowymi
2. Jeżeli $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest mierzalne (czyli borelowskie tutaj), to $f(X_1, \ldots, X_n)$ jest zmienną losową.
3. $\inf_n X_n$, $\sup_n X_n$, $\limsup_n X_n$, $\liminf_n X_n$ są zmiennymi losowymi.

Def. 3.5 Miarę μ na $(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}))$ zdefiniowaną wzorem

$$\mu(B) := \mathbb{P}[X \in B] =$$
$$= \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}] = \mathbb{P}[X^{-1}(B)]$$

dla każdego $B \in Bor(\mathbb{R})$, nazywamy **rozkładem** zmiennej losowej X.



$$\overbrace{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}^{\Omega} \xrightarrow{X} \overbrace{(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), \mu)}^{\text{p. prob.}}$$