24.02.2021

Ω – zbiór zdarzeń elementarnych (czyli „wyników doświadczenia")

$\omega \in \Omega$ – konkretny wynik, czyli zdarzenie elementarne

$A \subset \Omega$ – zdarzenie (czyli podzbiór Ω)

$A \cap B$, A^c, $A \cup B$, różne operacje na zdarzeniach.

Def. 1.1 Rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω nazywamy <u>σ - ciałem</u>, jeżeli

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F}$, to $A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Parę $(\Omega, \mathcal{F})$ nazywamy przestrzenią mierzalną.

Przykład

1. Rzut monetą. Możliwe dwa wyniki: orzeł (O) oraz reszka (R). $\Omega = \{O, R\}$. $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

2. Rzut kostką. $\Omega = \{1, \dots, 6\}^{n}$

3. n rzutów kostką: $\Omega = \{1, \dots, 6\}$.

Możemy wyróżnić konkretne zdarzenie, np. A – suma wyrzuconych wyników jest l. parzystą, wtedy

$$A = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : \omega_1 + \dots + \omega_n = 0 \mod 2\}$$

4. Czas oczekiwania na pewne zdarzenie (np. przyjazd tramwaju, wzrost kursu akcji), $\Omega = [0, \infty)$

Def 1.2 Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie p. mierzalną.

Funkcję $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ nazywamy

prawdopodobieństwem (miarą prob.)

jeżeli:

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ dla dowolnych

parami rozłącznych zdarzeń

$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$

$(\Omega, \mathcal{F}) \rightsquigarrow (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Przestrzeń probabilistyczna

~provided by Kolmogorov, ok. 1930 r.

Przykład P-stwo klasyczne

Ω - skończ. zbiór. $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Wówczas

wystarczy zdefiniować p-stwo na

zdarzeniach elementarnych: $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$

Wtedy dla $A \subset \Omega$ mamy $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Przykład Załóżmy, że $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ jest zbiorem przeliczalnym i niech $p_1, p_2, \ldots \geq 0$ sumują się do 1. Wtedy $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ oraz $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ dla $i \in \mathbb{N}$ jednoznacznie definiuje to p. prob.

Tw. 1.4 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — p. prob.

$A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$.

1° $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2° $A_1, \ldots, A_n$ — parami rozłączne, wtedy $\mathbb{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$ (dopuszczamy $n = \infty$)

3° $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$

4° $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}[B \setminus A] = \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A]$

$\mathbb{P}[B] \geq \mathbb{P}[A]$

5° $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

6° $\mathbb{P}[\bigcup_i A_i] \leq \sum_i \mathbb{P}[A_i]$

Tw. 1.5 Zasada włączeń i wyłączeń

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Wtedy

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n] =$$

$$= \sum_{i}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i<j}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + \sum_{i<j<k}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j \cap A_k]$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}[A_1 \cap \dots \cap A_n]$$

Tw. 1.6 Tw. o ciągłości

$A_1, \dots, \in \mathcal{F}$.

1° Jeżeli ciąg zdarzeń $\{A_n\}$ jest wstępujący (tzn. $A_1 \subset A_2 \subset \dots$) oraz oraz $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, wtedy

$$\mathbb{P}[A] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[A_n]$$

2° Jeżeli ciąg zdarzeń $\{A_n\}$ jest zstępujący, to ($A_1 \supset A_2 \supset \dots$) oraz $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, wtedy

$$\mathbb{P}[A] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[A_n]$$

Przykład Do urny wrzucamy nieskończenie wiele kul o numerach $1, 2, \ldots$ w następujący sposób:

- o godz. $(12.00 - 1\,\text{min.})$ wrzucamy kule $1, 2, \ldots, 10$;
- o godz. $(12.00 - \frac{1}{2}\,\text{min.})$ wyciągamy
  a) kulę 10 b) kulę 1 c) losową kulę,
  a następnie wrzucamy kule $11, 12, \ldots, 20$;
- o godz. $(12.00 - \frac{1}{4}\,\text{min.})$ wyciągamy
  a) kulę 20 b) kulę 2 c) losową kulę
- ...

Ile kul będzie w urnie o 12:00?

a) ∞ wiele

b) 0

c) patrzymy na kulę 1.

A_n – po n krokach 1 jest w urnie, $A_n \supset A_{n+1}$

$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ – o 12.00 1 będzie w urnie

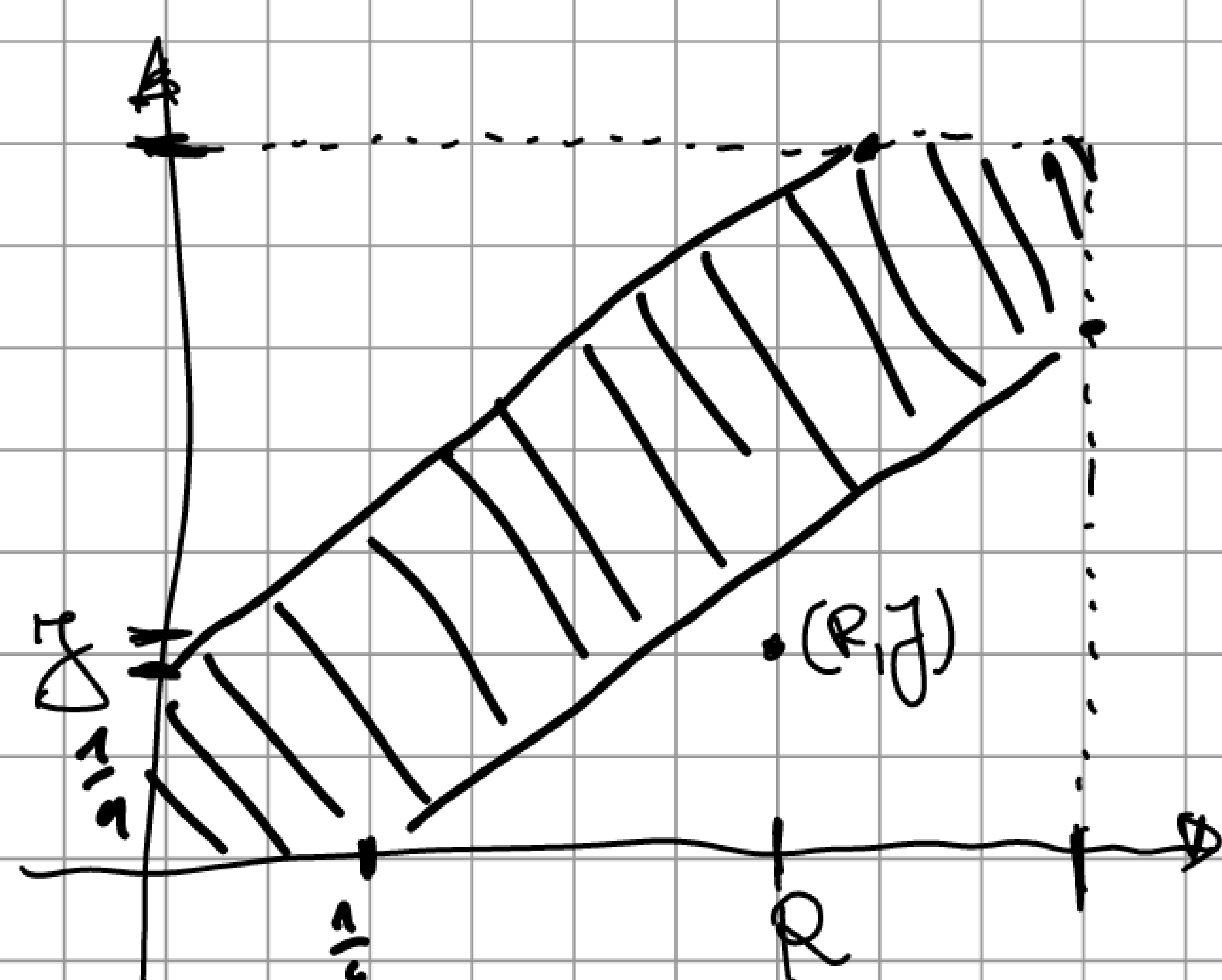
Z tw. o ciągłości $\mathbb{P}[A] = \lim_n \mathbb{P}[A_n]$.

$$\mathbb{P}[A] = \lim_n \mathbb{P}[A_n] = \frac{9}{10} \cdot \frac{18}{19} \cdot \ldots \cdot \frac{9n}{9n+1} \longrightarrow 0$$

Urna będzie pusta z pstwem 1.

Zadanie: zastanów się jak wygląda p. prob. dla powyższego przykładu.

__Przykład__ Romeo i Julia umówili się na spotkanie o północy. Każde z nich przybędzie z losowym opóźnieniem co najwyżej godzinnym (i opóźnienie to jest jedn. rozł. w czasie). Osoba która przyjdzie pierwsza może czekać co najwyżej 15 minut. Jakie jest p-stwo że się spotkają?



Spotkają się $\iff |R-J| < \frac{1}{4}$

$\Omega = [0,1]^2$, $\mathcal{F} = Bor([0,1]^2)$, $\mathbb{P} = Leb.$

Łatwo sprawdzić, że $\mathbb{P}[\quad] = \frac{7}{16}$.