RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 9

1*. (Kolekcjoner kuponów) Załóżmy, że w loterii są kupony o n typach i że w każdym losowaniu (niezależnie od liczby poprzednich losowań) kupon o danym typie jest wylosowany z prawdopodobieństwem n. Każde kolejne losowanie jest niezależne od poprzednich. Niech X_n oznacza liczbę losowań potrzebnych do zgromadzenia pełnej kolekcji kuponów. Pokaż, że

$$\frac{X_n}{n \log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

2*. Niech f będzie dowolną funkcją ciągłą na $[0, 1]$. Ustalmy $p \in [0, 1]$. Niech $\{X_i\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $\mathbb{P}[X_i = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_1 = 0] = p$ i niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Pokaż, że

$$\mathbb{E}f(S_n/n) = f(p)$$

jednostajnie ze względu na p. Wywnioskuj stąd twierdzenie Weierstrassa mówiące, że każdą funkcję ciągłą na $[0, 1]$ można przybliżyć ciągiem wielomianów zbieżnych jednostajnie.

3*. Do n urn wrzucono losowo k_n kul (tzn. dana kula może trafić do urny z prawdopodobieństwem $1/n$). Oznaczmy przez X_n liczbę pustych urn. Pokaż, że jeżeli k_n/n zbiega do c, to

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} e^{-c}.$$

4. Pokaż, że jeśli $0 < p < q$, to

$$(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}|X|^q)^{1/q} .$$

5. (*Reguła n sigm*) Pokaż, że jeśli $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$, to

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > n\sigma) \leq \frac{1}{n^2} .$$

6. (Duże odchylenia) Niech $\{X_i\}_{i\geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takich, że $\mathbb{E}e^{tX_1} < \infty$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Wówczas dla każdego $a > \mathbb{E}X_1$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq na\right) \leq e^{-nI(a)},$$

dla funkcji

$$I(a) = \sup_{t\geq 0} \big(ta - \log \mathbb{E}[e^{tX_1}]\big).$$

Ponadto dla każdego $a < \mathbb{E}X_1$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq na\right) \leq e^{-nI_-(a)},$$

dla funkcji

$$I_-(a) = \sup_{t\leq 0} \big(ta - \log \mathbb{E}[e^{tX_1}]\big).$$

7. (Duże odchylenia dla rozkładu dwumianowego) Niech X_n będzie zmienną losową o rozkładzie $Bin(n, p)$. Wówczas dla $a \in (p, 1]$,

$$\mathbb{P}(X_n \geq na) \leq e^{-nI(a)},$$

gdzie

$$I(a) = a \log(a/p) + (1 - a) \log((1 - a)/(1 - p)).$$

8*. (Nierówność Bernsteina). Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}[X_i = 1] = \mathbb{P}[X_i = -1] = 1/2$ i niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Pokaż, że dla każdego $r > 0$

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq r\right] \leq e^{-r^2/2}.$$

9. Pokaż, że jeżeli X_n jest liczbą orłów w n rzutach monetą, to

$$\mathbb{P}\big(|X_n - n/2| \geq \sqrt{2n \log n}/2\big) \leq \frac{2}{n}.$$

10*. Niech U_i, $i = 1, 2, ..$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie: $\mathbb{P}(U_i = 1) = \mathbb{P}(U_i = -1) = 1/2$. Zdefiniujmy $S_n = U_1 + .. + U_n$. Pokaż, że

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log n}} \leq 1 \qquad \text{p.w.}$$