RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 8

1. d-wymiarowa zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(m, A^{-1})$ o gęstości

$$g(x) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\Big[-\frac{1}{2}\langle A(x-m), (x-m)\rangle \Big].$$

Udowodnij, że $\mathbb{E}X = m$ oraz $\Lambda = A^{-1}$ jest macierzą kowariancji X.

2. d-wymiarowa zmienna losowa na rozkład normalny w $\mathbb{R}^d$, o średniej m i macierzy kowariancji Λ. Niech T będzie przekształceniem afinicznym $\mathbb{R}^d$ na $\mathbb{R}^k$ ($k \le d$). Pokaż, że TX ma rozkład normalny w $\mathbb{R}^k$. Wyznacz jego średnią i macierz kowariancji.

3. Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0,1)$. Wykaż, że zmienne losowe $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ i $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}$ są niezależne i obie mają rozkład $N(0,1)$.

4. Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie wektorem losowym o standardowym rozkładzie normalnym $N(\mathbf{0}, I)$, gdzie I jest macierzą identyczności. Sprawdź, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$.

5. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą wzajemnie nieskorelowanymi zmiennymi losowymi, takimi, że ich łączny rozkład jest normalny. Wykazać, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne.

6. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0,1)$ oraz niech $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ i $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ będą ustalonymi wektorami. Pokaż, że zmienne losowe

$$W = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j, \quad Z = \sum_{j=1}^{n} b_j X_j$$

są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są prostopadłe. Opisz rozkłady W i Z.

7. Podaj przykład nieskorelowanych zmiennych losowych o rokładzie normalnym, które nie są niezależne.

8. (**Transformata Boxa-Müllera**) Pokaż, że jeżeli zmienne losowe X, Y są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$, to

$$U = \sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y) \qquad \text{i} \qquad V = \sqrt{-2\log X}\sin(2\pi Y)$$

są niezależne i mają rozkład $N(0,1)$.

9. Niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbb{E}|X| < \infty$. Niech

$$X_n(\omega) = \begin{cases} -n & \text{jeżeli } X(\omega) < -n, \\ X(\omega) & \text{jeżeli } |X(\omega)| \le n, \\ n & \text{jeżeli } X(\omega) > n. \end{cases}$$

Czy $\{X_n\}_n$ zbiega do X p.n.? A czy zbiega w L^1?

10. Dane są dwa ciągi $\{X_n\}_{n\ge1}$, $\{Y_n\}_{n\ge1}$ zbieżne p.n. do zmiennych X, Y. Pokaż, że jeśli dla każdego n zmienne X_n i Y_n mają ten sam rozkład, to X i Y też mają ten sam rozkład.

11. Dany jest ciąg $\{X_n\}_{n\ge1}$ niezależnych zmiennych losowych takich, że X_n ma rozkład Poissona z parametrem $1/n$. Czy ten ciąg jest zbieżny wg prawdopodobieństwa, p.n., w L^2, w $L^{3/2}$?

12. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Pokaż, że $\frac{1}{n}\max_{1\le i\le n}|X_i|$ zbiega do zera według prawdopodobieństwa.

13. Dane są zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ takie, że $\mathbb{P}(X_k = k^2) = 1/k^2$, $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - 1/k^2$. Pokaż, że $\sum_{k=1}^n X_k \to -\infty$, p.w. gdy $n \to \infty$.

14. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną taką, że Ω jest zbiorem przeliczalnym, a $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Pokaż, że na tej przestrzeni zbieżność według prawdopodobieństwa jest równoważna zbieżności p.w.