RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 7

1. Pokaż, że jeżeli zmienna losowa X ma rozkład dyskretny skoncentrowany na liczbach całkowitych nieujemnych, to
$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

2. Wykaż, że jeżeli $X \geq 0$ oraz $\mathbb{E}X < \infty$, to
$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} (1 - F(t))dt,$$
gdzie F oznacza dystrybuantę X. Wywnioskuj, że jeżeli $p > 0$, to
$$\mathbb{E}X^p = p \int_0^{\infty} t^{p-1} \mathbb{P}(X \geq t)dt.$$

3. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Udowodnić, że zmienne X/Y oraz $X + Y$ są niezależne.

4. Niech X i Y będą ograniczonymi zmiennymi losowymi (tzn. istnieje M takie, że $\mathbb{P}(|X| < M) = \mathbb{P}(|Y| < M) = 1$) takimi, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $\mathbb{E}X^k = \mathbb{E}Y^k$. Pokaż, że X i Y mają ten sam rozkład.

5. Liczby $1, 2, .., n$ ustawiono losowo w ciąg $(a_1, .., a_n)$. Niech N oznacza największą taką liczbę, że $a_k > a_{k-1}$ dla $k \leq N$. Oblicz $\mathbb{E}N$.

6*. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1.

- Oblicz
$$a_n = \mathbb{E}\big[\max_{i \leq n} X_i\big].$$
- Dla każdego $t > 0$ oblicz
$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[\max_{i \leq n} X_i - a_n \leq t].$$

7. Zmienne losowe X, Y spełniają warunki: $\mathrm{var}X = 3$, $\mathrm{Cov(X, Y)} = -1$, $\mathrm{var}Y = 2$. Oblicz $\mathrm{var}(4X - 3Y)$ oraz $\mathrm{Cov}(2X - Y, 2X + Y)$.

8. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_k$ są niezależne o jednakowym rozkładzie równomiernym na zbiorze $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Wyznacz rozkład (dystrybuantę) zmiennej losowej $X = \min_{1 \leq i \leq k} X_i$. Znajdź rozkład graniczny dla $k \to \infty$ gdy $n/k \to \lambda > 0$. Co to za rozkład?

9. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach z dystrybuantami F_1, F_2 i gęstościami f_1, f_2 odpowiednio. Znajdź
a) dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej $U = X - Y$;
b) dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej $V = XY$;

10. Wyznacz dystrybuantę oraz gęstość zmiennej losowej $Z = XY$, jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach:
a) jednostajnych $U([0, a])$, $U([0, b])$ odpowiednio;
b) wykładniczych $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\mathrm{Exp}(\mu)$ odpowiednio;

11. Wyznacz dystrybuantę wektora losowego (X, Y) o rozkładzie jednostajnym na przekątnej kwadratu jednostkowego $[0, 1]^2$, łączącej punkty $(0, 0)$ i $(1, 1)$. Wyznacz rozkłady brzegowe, oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$, $\mathrm{Var}(X + Y)$ oraz sprawdź czy zmienne losowe X i Y są niezależne.