RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 5

1. Czy λ-układ jest zawsze σ-ciałem?

2. Pokaż, że jeżeli rodzina $\mathcal{L}$ jest jednocześnie π-układem oraz λ-układem, to jest σ-ciałem.

3. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi. Oznaczmy przez μ_X i μ_Y ich rozkłady. Pokaż, że rodzina

$$\mathcal{L} = \big\{ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \ \mu_X(A) = \mu_Y(A) \big\}.$$

jest λ-układem.

4*. Dane są miary probabilistyczne μ na $\mathbb{R}$ oraz ν na $\mathbb{R}^2$ takie, że dla dowolnych s, t

$$\mu((-\infty, s]) \cdot \mu([t, \infty)) = \nu((-\infty, s] \times [t, \infty)).$$

Pokaż, że $\nu = \mu \otimes \mu$.

5. Punkt x nazywamy punktem skokowym rozkładu μ na $\mathbb{R}$, gdy $\mu(\{x\}) > 0$. Pokaż, że rozkład prawdopodobieństwa μ może mieć co najwyżej przeliczalną liczbę punktów skokowych.

6. a) Niech X będzie zmienna losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-5, 10]$ ($X \sim U([-5, 10])$. Oblicz $\mathbb{P}[X > 0]$, $\mathbb{P}[5 < X < 7]$, $\mathbb{P}[X^2 - 12X + 35 > 0]$, $\mathbb{P}[X \in \mathbb{Q}]$.

b) Rozwiąż to samo zadanie, ale przy założeniu, że X jest liczbą losową z przedziału $[-5, 10]$ o rozkładzie zadanym gęstością $f(x) = Cx$, dla odpowiedniej stałej C.

7. Podaj przykład dystrybuanty, której zbiór wszystkich punktów nieciągłości jest gęsty w zbiorze $[0, 1] \cup [2, 3]$.

8. (*Rozkład geometryczny* $\mathrm{Geom}(p)$) Wykonujemy doświadczenia Bernoulliego (z prawdopodobieństwem pojedynczego sukcesu p) aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X oznaczającej liczbę wykonanych doświadczeń.

9. (*Rozkład wykładniczy* $\mathrm{Exp}(\lambda)$) Przypuśćmy, że doświadczenia opisane w zadaniu poprzednim wykonuje się n razy na sekundę, zaś prawdopodobieństwo sukcesu wynosi λ/n, $\lambda > 0$. Wyznaczyć dystrybuantę czasu oczekiwania na pierwszy sukces X_n i zbadać jej zachowanie gdy $n \to \infty$.

10. Wykaż, że rozkłady z dwóch poprzednich zadań mają tzw. własność braku pamięci: jeśli X ma rozkład geometryczny bądź wykładniczy, to

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s),$$

gdzie $s, t \in \mathbb{N}$ w przypadku rozkładu geometrycznego oraz $s, t \in \mathbb{R}^+$ w przypadku rozkładu wykładniczego. (*) Udowodnij, że są to jedyne procesy z własnością braku pamięci: geometryczny na $\mathbb{N}$, wykładniczy jest jedynym bezatomowym rozkładem z brakiem pamięci na $\mathbb{R}^+$.

11. (*Rozkład Poissona* $\mathrm{Poi}(\lambda)$) Niech $p_{k,n}$ będzie prawdopodobieństwem zajścia dokładnie k sukcesów w n próbach Bernoulliego o prawdopodobieństwie pojedynczego sukcesu p_n. Dla każdego ustalonego $k \in \mathbb{N}$ wyznacz

$$\lim_{n\to\infty} p_{k,n} \ , \qquad \text{jeśli} \quad \lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0 \ .$$

12. Zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego, tzn. rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}$$

Udowodnij, że $1/X$ ma ten sam rozkład, co X.

13. Niech (X, Y) będzie 2-wymiarową zmienną losową o rozkładzie zadanym gęstością $f(x, y) = 3x$ dla $0 \leq y \leq x \leq 1$ i $f(x, y) = 0$ poza tym zbiorem. Znajdź rozkłady brzegowe. Czy X i Y są niezależne?

14. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = C \cdot xy \cdot \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x, y)$.
a) Wyznaczyć C.
b) Obliczyć $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$.
c) Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X/Y.
d) Czy zmienne X i Y są niezależne?
e) Czy X/Y i Y są niezależne?

15. Z talii 52 kart losujemy ze zwracaniem 5 razy po jednej karcie. Niech X oznacza liczbę wyciągniętych pików, Y - liczbę wyciągniętych kierów, Z - liczbę wyciągniętych asów. Czy zmienne X i Y są niezależne? Czy zmienne X i Z są niezależne?

16. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{U}[0, 1]$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że a) $X+Y < 1/2$, b) $XY < 1/2$, c) $|X-Y| < 1/2$, d) $X^2+Y^2 \leq 1/2$, e) równanie $t^2+Xt+Y = 0$ ma dwa rzeczywiste pierwiastki.

17. Romeo i Julia umówili się na spotkanie pomiędzy godziną 22, a 23. Każde z nich przybywa na spotkanie niezależnie z jednostajnym prawdopodobieństwem. Niech X będzie czasem oczekiwania pierwszej przybyłej osoby. Znajdź dystrybuantę i gęstość X.