RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 3

1. W urnie znajduje się $n-1$ kul białych i jedna czarna. Losujemy po jednej kuli aż do momentu, gdy wylosujemy czarną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wykonamy k losowań, jeżeli a) losujemy bez zwracania b) losujemy ze zwracaniem?

2. Czworo graczy dostało po 13 kart. Jeden z nich zobaczył przypadkowo u sąsiada a) asa pik, b) jakiegoś asa czarnego koloru, c) jakiegoś asa. Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe, że ten gracz nie ma asa.

3. W populacji jest 12% dyslektyków. Jeżeli w teście diagnostycznym uczeń popełni 7 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 7 błędów. Również nie-dyslektyk może popełnić co najmniej 7 błędów i dzieje się to z prawdopodobieństwem 0,05. Piotr popełnił 7 błędów. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest dyslektykiem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w kolejnym teście też popełni co najmniej 7 błędów?

4. Trzech strzelców oddało niezależnie po jednym strzale do tego samego celu. Prawdopodobieństwa trafień wynoszą odpowiednio p_1, p_2, p_3. Wyznacz prawdopodobieństwo, że trzeci strzelec trafił, jeżeli cel został trafiony a) jednym pociskiem; b) dwoma pociskami; c) trzema pociskami.

5. W pewnej fabryce telewizorów każdy z aparatów może być wadliwy z prawdopodobieństwem p. W fabryce są trzy stanowiska kontroli i wyprodukowany telewizor trafia na każde ze stanowisk z jednakowym prawdopodobieństwem. i-te stanowisko wykrywa wadliwy telewizor z prawdopodobieństwem p_i ($i = 1, 2, 3$). Telewizory nie odrzucone w fabryce trafiają do hurtowni i tam poddawane są dodatkowej kontroli, która wykrywa wadliwy telewizor z prawdopodobieństwem p_0.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dany nowowyprodukowany telewizor znajdzie się w sprzedaży (tzn. przejdzie przez obie kontrole).

b) Przypuśćmy, że telewizor jest już w sklepie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest on wadliwy?

6. Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry. Następnie rzucamy ponownie tymi kostkami, na których nie wypadły "jedynki". Obliczyć prawdopodobieństwo, że na wszystkich trzech kostkach będą "jedynki".

7. Przypuśćmy, że $1/20$ wszystkich kości do gry jest sfałszowana i zawsze wypada na nich szóstka. Wybieramy losowo dwie kostki i rzucamy nimi. Oblicz

a) prawdopodobieństwo wyrzucenia w sumie 11 oczek;

b) prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna kostka była sfałszowana, jeżeli wyrzuciliśmy 11 oczek;

8. Kierowcy dzielą się na ostrożnych (jest ich 95% i taki kierowca powoduje w ciągu roku wypadek z prawdopodobieństwem 0.01) i piratów (jest ich 5% i taki kierowca powoduje w ciągu roku wypadek z prawdopodobieństwem 0.5). Wybrany losowo kierowca nie spowodował wypadku w pierwszym i drugim roku. Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe, że spowoduje wypadek w trzecim roku.

9*. Niech $\sigma \in S_{2n}$ będzie losową permutacją (prawdopodobieństwo wylosowania każdej permutacji jest identyczne, tzn. wynosi $1/(2n)!$). Czy zdarzenia

$$\{\sigma(1) < \sigma(2n)\}, \{\sigma(2) < \sigma(2n-1)\}, \ldots, \{\sigma(n) < \sigma(n+1)\}$$

są niezależne?

10*. Podczas zawodów na skoczni Letalnica w Planicy startowało 30 skoczków. Warunki atmosferyczne spowodowały, że długości skoków oddawanych przez kolejnych skoczków były zupełnie losowe. W rezultacie ostateczna kolejność była również zupełnie losowa (dla matematycznych purystów: ostatecznie kolejność była zadana przez losową permutację $\sigma \in S_{30}$, tzn. k-ty skoczek był na miejscu $\sigma(k)$, a wylosowanie każdej permutacji jest jednakowo prawdopodobne). Niech B_k będzie zdarzeniem, że

k-ty skoczek uzyskał lepszy wynik od swoich wszystkich poprzedników. Udowodnij, że zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_{30}$ są niezależne. Oblicz $\mathbb{P}[B_k]$.

11. Pokaż, że σ-ciała $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne zdarzenia $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_n$ są niezależne.

12. Uzasadnij, że jeżeli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne, to również σ-ciała generowane przez te zbiory są niezależne.

13*. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną taką, że Ω jest zbiorem dyskretnym (skończonym lub przeliczalnym). Pokaż, że nie istnieje rodzina niezależnych zdarzeń $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takich, że $\mathbb{P}(A_n) = 1/2$ dla każdego n.

14. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathrm{Leb})$ i niech

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2^n}$$

będzie nieskończonym rozwinięciem dwójkowym liczby $\omega \in [0,1]$. Udowodnij, że zbiory $A_n = \{\omega : \omega_n = 0\}$ są niezależne.

15*. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną taką, że istnieje n niezależnych zbiorów $B_1, \ldots, B_n$ i takich, że $\mathbb{P}[B_i] \in (0,1)$. Z ilu co najmniej elementów musi się składać Ω?

16*. Zapoznaj się z dowodem twierdzenia Kołmogorowa (dowód można znaleźć np. w rozdziale C.4 [JS]).