RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 10

1. Sprawdzić, że zdarzenie $\{\lim_{n\to\infty} X_n = a\}$ należy do $\mathcal{F}_\infty$.

2. Sprawdzić, że zdarzenie $\{\limsup_{n\to\infty} X_n = \infty\}$ należy do $\mathcal{F}_\infty$.

3. Sprawdzić, że zdarzenie $\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \le a\right\}$ należy do $\mathcal{F}_\infty$.

4. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne. Udowodnij, że ciąg średnich

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

jest zbieżny p.w. z prawdopodobieństwem 0 lub 1. Pokaż ponadto, że jeżeli ten ciąg jest zbieżny p.w., to jego granica ma rozkład jednopunktowy.

5. Obliczyć granice:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{[0,1]^n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\, dx_1 \ldots dx_n$;

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{[0,1]^n} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 \ldots dx_n$;

6. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Obliczyć granice:

a) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) dx_1 \ldots dx_n$;

b) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n x_i}\right) dx_1 \ldots dx_n$.

7. Definiujemy ciąg zmiennych losowych w następujący sposób: niech X_0 ma rozkład jednostajny na $[0,1]$, dla $n \ge 1$, X_{n+1} na rozkład jednostajny na $[0, X_n]$. Pokaż, że granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log X_n$$

istnieje p.n. i znajdź jej wartość.

8. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Znaleźć

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n X_i}\ ,$$

jeśli

a) X_1 ma rozkład jednostajny $U(0,1)$;

b) X_1 ma rozkład o gęstości postaci $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$.

9*. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem zmiennych losowych o średniej 0. Czy ze zbieżności $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ wynika zbieżność $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$?

10. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie Poissona Poi(λ). Znaleźć granice:

a) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i X_{i+1}$;

b) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 X_{i+1}$;

c) $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i X_{i+1}}$.

11*. Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem nieujemnych niezależnych zmiennych o takim samym rozkładzie i takich, że $\mathbb{E}X_1 = \mu < \infty$. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Zdefiniujmy $N_t = \sup\{n:\ S_n \le t\}$. Pokaż, że gdy $t \to \infty$, to

$$\frac{N_t}{t} \to \frac{1}{\mu} \qquad p.n.$$

12. (*Średnia i wariancja empiryczna*) Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{Var}(X_1) < \infty$. Definiujemy zmienne losowe

$$\overline{X} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{oraz} \qquad S^2 \;=\; \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \;.$$

Sprawdzić, że $\mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = \mathbb{E}X_1$, $\mathbb{E}\left(S^2\right) = \mathbb{Var}(X_1)$ oraz pokazać, że $\overline{X} \xrightarrow{\text{p.n.}} \mathbb{E}X_1$, $S^2 \xrightarrow{\text{p.n.}} \mathrm{Var}(X_1)$.

13. Dany jest ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych i nieujemnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Udowodnij, że jeżeli $\mathbb{E}X_1 = \infty$, to

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to \infty \qquad \text{p.w.}$$

14*. Udowodnij ogólniejszą wersję lematu Kroneckera: jeżeli $\{a_n\}_n$ i $\{b_n\}$ są dwoma ciągami takimi, że $0 < b_n \nearrow \infty$ (tzn. monotonicznie zbiega do ∞) oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} < \infty,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

15*. Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie i ich wspólna dystrybuanta jest funkcją ciągłą. Mówimy, że X_j jest rekordem, jeżeli $X_j > X_i$ dla każdego $i < j$. Niech Y_n będzie liczbą rekordów wśród pierwszych n zmiennych losowych. Pokaż, że

$$\lim \frac{Y_n}{\log n} = 1, \quad p.n.$$

Wskazówka: pokaż, że zdarzenia $\{X_n \text{ jest rekordem}\}$ są niezależne, a następnie postępuj jak w dowodzie SLLN, korzystając ostatecznie z ogólniejszej wersji lematu Kroneckera.