

Zad. 3

Procedure bubble($T[1..n]$)

for $i \leftarrow n$ to 2 do

for $j \leftarrow 1$ to $i-1$

if $T[j] > T[j+1]$

temp $\leftarrow T[j]$

$T[j] \leftarrow T[j+1]$

$T[j+1] \leftarrow$ temp

Idea algorytmu: przechodzimy po tablicy T przepychając największy element na koniec tablicy. W k -tej iteracji zewnętrznej pętli na swoim miejscu są elementy $T[n], T[n-1], \dots, T[n-k+1]$.

W złożoność: zawsze n^2 . Instrukcje

wewnętrznej pętli wykonują się $\Theta(n^2)$

razy i wykorzystują stałą liczbę

operacji maszyny RAM.

Algorytm jest stabilny. Jednakże wykonuje bardzo wiele porównań i potencjalnie bardzo wiele zmian wartości zmiennych.

Zad. 4

Procedure russian_mult (A, B)

result \leftarrow 0

while $A > 0$

if $A \% 2 = 1$

result \leftarrow result + B

B \leftarrow B \cdot 2

A \leftarrow $\lfloor A / 2 \rfloor$

Spójrzmy na binarny zapis A oraz B.

$$\begin{array}{r} 1100101 \\ \cdot 11010 \\ \hline 11010 \\ 11010 \\ 11010 \\ 11010 \\ \hline 111010 \\ \hline 101001000010 \end{array}$$

Zauważamy, że w algorytmie
z treści notatki a_i nieparzyste
iff i -ty bit w A jest
zapalony. Ponadto

$$A \cdot B = \sum_{\substack{i \text{ t. j. e.} \\ i\text{-ty bit w } A \\ \text{zapalony}}} B \cdot 2^{i-1} =$$

$$= \sum_{i: a_i \text{ nieparzyste}} B \cdot 2^{i-1} =$$

$$= \sum_{i: a_i \text{ niep.}} B_i$$

Zatem algorytm realizuje pisemne
mnożenie liczb zapisie binarnym.

Jego złożoność to $\log A$, pamięciowe $O(1)$
w jedn. kryt. kosztów

W logarytmicznym kryterium
 złożoności czasowa wynosi $\log A \cdot \log AB$
 złożoności pamięciowa to $\log A + \log B$.

Zad. 5

Mamy dany ciąg rekurencyjny
 wzorem:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2 = c_2 \\ \vdots \\ a_k = c_k \\ a_{n+1} = b_k a_n + b_{k-1} a_{n-1} + \dots + b_1 a_{n-k+1}, n \geq k \end{cases}$$

Gdzie c_i, b_i, k to pewne stałe.

Wtedy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{bmatrix}$$

Macierz M

Zatem jeśli weźmiemy $V_1 = [c_1, \dots, c_k]^T$,
to pierwszą wartość w wektorze
 $M^{n-1} V_1$ określa a_n .

Kiedy rekurencyjna zależność
wyraża się wzorem

$$a_{n+1} = b_k a_n + \dots + b_1 a_{n-k+1} + w(n),$$

gdzie $w(n) = w_0 + w_1 n + \dots + w_l n^l$,

to algorytm możemy przeprowadzić
w analogiczny sposób

Obliczanie kolejnych wyrazów a_n, \dots, a_{n+k}

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_k & | & w_0 & w_1 & \dots & w_l \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \binom{l}{0} & \binom{l}{1} & \dots & \binom{l}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-2} \\ a_{n+k-1} \\ 1 \\ n+k \\ \vdots \\ (n+k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+k} \\ a_{n+k+1} \\ 1 \\ n+k+1 \\ \vdots \\ (n+k+1) \end{bmatrix}$$

Obliczanie $1, n+k+1, \dots, (n+k+1)^l$

Złożoność pierwszego algorytmu to $O(\log n \cdot k^\omega)$, drugiego $O(\log n (k+l)^\omega)$.

Ład. 6 (z wykorzystaniem algorytmu szybkiego potęgowania)

Pokażemy za pomocą indukcji matematycznej, że wynikiem procedury jest $(a_1 + \dots + a_n) \bmod 2$.

Dla $n=1$ teza oczywiście zachodzi. Założymy, że teza

zachodzi dla $1, \dots, n$. Pokażemy

jej prawdziwość dla $n+1$.

Niech $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$.

BSO w pierwszym kroku wybieramy

liczby a_n oraz a_{n+1} . Wtedy liczby

te wypadają ze zbioru i tworzą ten

zbiór $(a_n - a_{n+1})$, czyli $A' = \{a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - a_{n+1}\}$.

Z założenia indukcyjnego wiemy, że
wynikiem wykonania procedury na
zbiorze A' jest $(a_1 + \dots + a_{n-2} + (a_n - a_{n+1})) \% 2$
 $= (a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}) \% 2$. Ponadto

wynik ten jest równy wynikowi
wykonania naszej wyjściowej
procedury, co dowodzi tezę. \blacksquare

Korzystając z naszego twierdzenia
z łatwością prezentujemy następujący
równoważny algorytm:

```
result ← 0
```

```
for a in A
```

```
    result ← result + a
```

```
return (result % 2)
```


Zad. 4

Przy pomocy listy krawędzi
konstruujemy tablicę $par[1..n]$,
gdzie $par[u] = v \Leftrightarrow (v, u) \in E$
(czyli u jest ojcem v).

Powodto zakt. że 1 jest konem,
 $par[1] = 1$.

Procedure $is_ancestor(u, v)$

if $u = 1$ or $par[v] = u$

return true

return $is_ancestor(u, par[v])$

(u jest przodkiem $v \Leftrightarrow u$ jest
ojcem v lub u jest przodkiem
ojca v).

Złożoność takiego algorytmu to $O(n \cdot m)$. Da się to zrobić lepiej.

Niech $G[1 \dots n]$ będzie listową reprezentacją grafu (przy czym zakładam skierowanie krawędzi od ojców do synów). Definiujemy procedurę obliczania tablic $pre[1 \dots n]$ oraz $post[1 \dots n]$:

Procedure compute_prepost($G[1 \dots n]$):

$cnt \leftarrow 0$

 Procedure DFS(v):

$pre[v] \leftarrow cnt$

$cnt \leftarrow cnt + 1$

 for u in $G[v]$

 DFS(u)

$post[u] \leftarrow cnt$

 DFS(1)

Zauważamy, że u jest przodkiem v
 $\Leftrightarrow v$ jest w poddrzewie u .

Nie trudno zauważyć, że

v jest w poddrzewie $u \Leftrightarrow$
 $pre[v] \geq pre[u]$ oraz $post[v] \leq post[u]$.

Wtedy procedura `is_ancestor`
znacząco się upraszcza:

Procedura `is_ancestor(u, v)`:

`return pre[v] >= pre[u] and post[v] <= post[u]`

Złożoność czasowa: $O(n + m)$

Złożoność pamięciowa: $O(n + m)$
(dla obu algorytmów).