

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 1 - ROZGRZEWKA

1. Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ umieszczono 8 nierozróżnialnych wież, w taki sposób aby żadne dwie się nie biły. Na ile sposobów można to zrobić? Jak zmieni się wynik, gdy wieże będą rozróżnialne?
2. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania przez gracza podczas gry w pokera: pary, dwóch par, trójki, fulla, karety, koloru, pokera? Przypomnijmy, że talia składa się z 24 kart, a gracz dostaje 5 kart.
3. Na ile sposobów można ustawić 7 krzeseł białych i 3 czerwone przy okrągłym stole?
4. Ile jest różnych rozwiązań w zbiorze liczb naturalnych równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$. A jeżeli założymy ponadto, że $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$?
5. W klasie jest 15 uczniów. Na każdej lekcji odpytywany jest losowo jeden z nich. Oblicz prawdopodobieństwo, że podczas 16 lekcji zostanie przepytany każdy z nich.
6. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w potasowanej talii 52 kart wszystkie cztery asy znajdują się koło siebie.
7. Przez Los Angeles przebiega 5-pasmowa autostrada. Typowy kierowca co minutę zmienia losowo pas. Oblicz prawdopodobieństwo, że po 4 minutach będzie z powrotem na początkowym pasie .
8. Na przyjęciu jest n osób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spotkasz tam osobę, która obchodzi urodziny tego samego dnia co Ty? Dla jakich n to prawdopodobieństwo było większe niż $\frac{1}{2}$?
9. W Totolotku losuje się 6 z 49 liczb. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie nie będą dwoma kolejnymi liczbami naturalnymi?
10. Stefan Banach w każdej z kieszeni trzymał po pudełku zapalek. Początkowo każde z nich zawierało n zapalek. Za każdym razem kiedy Banach potrzebował zapalki sięgał losowo do jednej z kieszeni i wyciągał jedną zapalkę. Oblicz prawdopodobieństwo, że w momencie gdy sięgnął po puste pudełko, w drugim pozostało jeszcze k zapalek.
11. Podczas imprezy mikołajkowej wszystkie n prezentów pozbawiono karteczek z imieniem adresata i losowo rozdano uczestnikom. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo, że dokładnie 1 osoba dostanie własny prezent. Oblicz p_n oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.
12. Udowodnij wzór włączeń i wyłączeń
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right).$$
13. (Nierówność Boole'a) Udowodnij, że
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$
14. Udowodnij, że
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) - (n-1).$$
15. Pokaż, że jeżeli $\mathbb{P}(A_i) = 1$ dla $i \geq 1$, to $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$.