$\mathcal{F}$ – $\sigma$ – ciało zbiorów $\Omega$

Załóżmy, że $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Niech teraz $f : \Omega \to \mathcal{F}$ dane

wzorem

$$f(x) = \bigcap_{i : x \in A_i} A_i$$

z zał. przeliczalne

Wtedy $f(x)$ jest najmniejszym

zbiorem z $\mathcal{F}$ zawierającym $x$.

Ponadto, dla dowolnych $x, y \in \Omega$

mamy $f(x) \cap f(y) \neq \emptyset \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Załóżmy, że $f(x) \cap f(y) \neq \emptyset$. Wtedy

Gdyby $x \notin f(y)$, to $f(x) \setminus f(y) \in \mathcal{F}$

byłby mniejszym zbiorem zawierającym

$x$. Zatem $x \in f(y) \Rightarrow f(x) \subseteq f(y)$.

Analogicznie $f(y) \subseteq f(x) \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Zatem zbiory $f(x)$ tworzą partycję zbioru $f(\Omega)$. Ponadto dla $A \in \mathcal{F}$

$$A = \bigcup_{x \in A} f(x).$$

Jeśli teraz $f(\Omega)$ skończone, to oczywiście $\mathcal{F}$ skończone. W innym razie wszystkie zbiory z $\mathcal{F}$ można utworzyć sumując pewne rozłączne zbiory z $f(\Omega)$. Skoro $|f(X)| = \aleph_0$, to

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{P}(f(X))| = \mathfrak{c}$$

Co prowadzi do sprzeczności, zatem $\mathcal{F}$ jest nieprzeliczalny.