

\mathcal{F} - σ -ciężo zbiorów Ω

Załóżmy, że $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Niech teraz $f: \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ dane

wzorem

$$f(x) = \bigcap_{i: x \in A_i} A_i \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{z} \\ \text{zest.} \\ \text{przebiegające} \end{array}$$

Wtedy $f(x)$ jest najmniejszym
zbiorem z \mathcal{F} zawierającym x .

Ponadto, dla dowolnych $x, y \in \Omega$

mamy $f(x) \cap f(y) \neq \emptyset \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Załóżmy, że $f(x) \cap f(y) \neq \emptyset$. Wtedy

Gdyby $x \notin f(y)$, to $f(x) \setminus f(y) \in \mathcal{F}$

byłby mniejszym zbiorem zawierającym

x . Zatem $x \in f(y) \Rightarrow f(x) \subseteq f(y)$.

Analogicznie $f(y) \subseteq f(x) \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Zatem zbiory $f(x)$ tworzą partycję zbioru Ω . Ponadto dla $A \in \mathcal{F}$

$$A = \bigcup_{x \in A} f(x).$$

Jeśli teraz $f(\Omega)$ skończone, to oczywiście \mathcal{F} skończone. W

innym razie wszystkie zbiory z \mathcal{F} można utworzyć sumując

pewne rozłączne zbiory z $f(\Omega)$.

Skoro $|f(\Omega)| = \aleph_0$, to

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{P}(f(\Omega))| = \aleph$$

Co prowadzi do sprzeczności,

zatem \mathcal{F} jest nieskończony.