ANALIZA III - LISTA 1

1. Podać przybliżoną wartość wykorzystując płaszczyznę styczną:

(a) $\frac{2,01 \cdot 1,03}{2,01^2 - 1,03^2}$ (b) $1,02^{3,01}$ (c) $\log(\sqrt[3]{1,03} + 0,08^4)$

2. Pokaż, że zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, ..., n\}$ jest otwarty, ale nie jest domknięty. Proszę zrobić to nie tylko rysunkowo, lecz spróbować zapisać.

3. Pokaż, że zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, ..., n\}$ jest domknięty. Proszę zrobić to nie tylko rysunkowo, lecz spróbować zapisać.

4. Niech $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 1, x > 0\}$. Pokaż, że U jest otwarty, ale nie jest domknięty. Proszę spróbować zrobić to nie tylko rysunkowo, lecz spróbować zapisać.

5. Niech $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 1, x > 0\}$. Pokaż, że D jest domknięty. Proszę spróbować zrobić to nie tylko rysunkowo, lecz spróbować zapisać.

6. Niech $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. Pokaż, że S jest domknięty.

7. Niech $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. Podaj przykład tak zdefinowanego S, który jest zwarty i takiego, który nie jest zwarty.

**8. Pokaż, że jeśli zbiór $D \subset \mathbb{R}^n$ jest domknięty i ograniczony, to z każdego ciągu $x_m \in D$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego $x \in D$. *Wsk. Zbieżność w* $\mathbb{R}^n$ *to zbieżność po współrzędnych.*

**9. Korzystając z poprzedniego zadania, pokaż, że jeśli zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty,a $f : D \mapsto \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest ograniczona i przyjmuje kresy tzn. istnieją punkty $x_1, x_2 \in K$ takie, że

$$f(x_1) = \min_{y \in K} f(y), \qquad f(x_2) = \max_{y \in K} f(y).$$

10. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanych ograniczeniach i określić czy jest to minimum lub maksimum.

(a) $f(x, y, z) = x - y + z$, przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 2$
(b) $f(x, y) = x^2 + y$, przy warunku $x^2 + y^2 = 1$

11. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniu i określić czy jest to minimum lub maksimum.
$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, przy warunku $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

12. Na elipsie $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ znaleźć punkty najbliższy i najdalszy od prostej $3x + y - 9 = 0$

13*. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniach i określić czy jest to minimum lub maksimum, ewentualnie lokalne minimum, lokalne maksimum. $f(x,y)=x^{10}+y^{10}$, przy warunku $x+y=2$

14*. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniach i okreslić czy jest to minimum lub maksimum. $f(x_1,...,x_n)=x_1^p+...+x_n^p$, przy warunku $x_1+...+x_n=a>0, x_i\geq 0$

15*. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniach i okreslić czy jest to minimum lub maksimum, ewentualnie lokalne minimum, lokalne maksimum. $f(x,y)=x+y$, przy warunku $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

16. Znaleźć największą i najmniejszą wartość podanych funkcji w kole jednostkowym, tzn. w zbiorze $\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$:
$f(x,y)=x^2+y^2-x-y+1$,
$f(x,y)=x^2+y^2+xy$,
$f(x,y)=xy-y^2$. (Dwa przykłady z trzech liczą się jako całe zadanie)

17*. Pudełko w kształcie prostopadłościanu otwarte od góry ma powierzchnię $16m^2$. Znaleźć wymiary, przy których objętość jest największa. Uzasadnić dlaczego to, co wyjdzie z rachunków daje największą objętość. W tym celu zastanowić się jaki jest zakres parametrów i co się dzieje, gdy jeden z wymiarów dąży do nieskończoności.

18. Poczta w USA wymaga, aby wymiary paczki były takie, że suma długości, podwojonej szerokości i podwojonej wysokości nie przekraczała 108 cali. Jaka jest objętość największej objętościowo paczki jaką poczta może dostarczyć? Uzasadnić dlaczego to, co wyjdzie z rachunków daje największą objętość. W tym celu zastanowić się jaki jest zakres parametrów.

19. Namiot bez podłogi, ma kształt cylindra ze stożkowym daszkiem. Jakie muszą być wymiary namiotu o ustalonej objętości V, aby uzyć jak najmniej materiału na jego budowę. Uzasadnić dlaczego to, co wyjdzie z rachunków daje najmniejszą powierzchnię. W tym celu zastanowić się jaki jest zakres parametrów.

20*. Niech n będzie liczbą naturalną całkowitą. Znajdź n liczb, których suma wynosi 8n, a suma kwadratów jest tak mała jak to możliwe. Uzasadnić dlaczego to, co wyjdzie z rachunków daje największą objętość. W tym celu zastanowić się jaki jest zakres parametrów i co się dzieje, gdy suma modułów tych liczb dąży do nieskończoności.

21. Znaleźć trzy liczby dodatnie o sumie 48 i największym możliwym iloczynie.

22. Znaleźć trzy dodatnie liczby dodatnie o iloczynie 48 i najmniejszej możliwej sumie. Dlaczego to, co nam wyjdzie z metody Lagrange'a daj najmniejszą, a nie największą możliwą sumę? Trzeba uzasadnić.

23. W trapezie równoramiennym suma mniejszej podstawy i dwóch ramion wynosi $3r$. Pokaż, że trapez o największym polu ma podstawę równą r raz kąt pomiedzy podstawą i ramieniem wynosi $2\pi/3$.

24*. W koło o promieniu r wpisać prostokąt o największej powierzchni. W kulę o promieniu r wpisać prostopadłościan o najwiekszej objętości.

25. Znaleźć wymiary puszki o największej objętości przy ustalonej powierzchni całkowitej. To samo dla puszki bez wieczka.

26. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniu
$f(x, y, z) = x + y + z$, przy warunkach $x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$

27. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanych ograniczeniach
(a) $f(x, y, z, w) = xw + yz$, przy warunkach $x^2 + y^2 = 1$, $w^2 + z^2 = 1$
(b) $f(x, y, z, w) = y^3 + xz^2$, przy warunkach $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - y = 0$

28. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniu
$f(x, y, z, w) = xyz$, przy warunkach $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$

29. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym ograniczeniu
$f(x, y, z, w) = xyz$, przy warunkach $xy + yz + xz = 8$, $x + y + z = 5$

30. Znajdź minimum funkcji $f(x, y, z) = xyz$ przy warunkach $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x - 2y = 0$.

31. Niech P będzie punktem powierzchni S w $\mathbb{R}^3$ okreslonej równaniem $g(x, y, z) = 1$, gdzie g jest klasy C^1 i ∇g jest niezerowy na S. Załóżmy, że P jest punktem, w którym odległość od początku układu jest największa. Pokazać, że wektor łączący początek układu z punktem P jest prostopadły do S czyli do $T_P S$.

**32. Udowodnij nierówność Höldera

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q \right)^{1/q},$$

gdzie $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_i, x_i \geq 0$. *Wskazówka: Znajdź minimum prawej strony nierówności przy warunku $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A$. Można zacząć od $n = 2$.*

**33. Udowodnij nierówność między średnią geometryczną, a arytmetyczną:

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

gdzie $x_i \geq 0$. *Wskazówka: Znajdź maksimum funkcji $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ przy warunku $\sum_{i=1}^{n} x_i = A$. Można zacząć od $n = 2$.*

34. Znajdź wartości ekstremalne funkcji $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j$, przy warunku $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$, gdzie macierz $[a_{i,j}]$ nie musi być symetryczna.