L4Z11

poniedziałek, 9 listopada 2020 12:49

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \vee y \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q} \text{ oraz } y = \frac{p}{q},\ p \perp q \end{cases}$$

Pokażemy, że zbiór punktów nieciągłości f jest miary 0.

1° Gdy $x \in \mathbb{R}$, $y \notin \mathbb{Q}$, to f ciągła w punkcie x, y. Weźmy $x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \to x$ oraz $y_n \in \mathbb{Q}$ t. że $\frac{p_n}{q_n} = y_n \to y$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(x_n, \frac{p_n}{q_n}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0$$

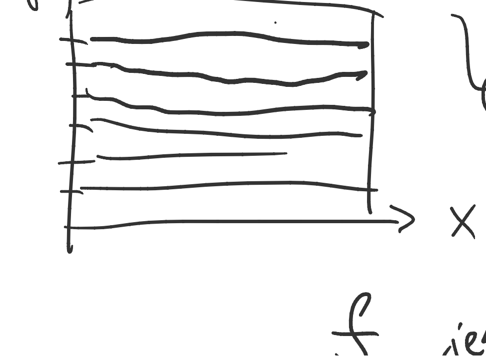
bo $q_n \to \infty$

2° W p.w. f jest nieciągła.

$x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{Q}$ to możemy przyjąć $x_n = x$, $y_n \to y$ t. że $y_n \notin \mathbb{Q}$,

wtedy $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0 \neq f(x, y)$

(poza $(x,y) = (0,0)$)



przeliczalnie dużo odcinków składających się z punktów $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{Q}$

f jest nieciągła dokładnie

f jest nieciągła dokładnie

tych odcinkach, one mają miarę 0,

ponadto miara jest funkcją przeliczalnie

addytywną, zatem miara sumy tych

odcinków również jest równa 0.

Stąd f całkowalna. Ponadto

$$\iint_{R} f(x,y)\,dx\,dy = \sup_{P} \alpha(P,f) =$$

$$= \sum_{S\in P} m_S(f)\,\Delta S = \sum_{S\in P} \inf_{(x,y)\in S} f(x,y)\,\Delta S = \sum_{S\in P} 0\cdot \Delta S = 0.$$