zad. 5

$\mathcal{L}_n \to$ interpoluje $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ w $x_k = 2\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$

$$R_n(x) = |f(x) - \mathcal{L}_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{p_{n+1}(x)} \right|, \quad \xi \in [-2,2]$$

$f^{(n+1)}(\xi)$ szacujemy po prostu przez $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$\cancel{p_{n+1}(x) = (x-x_0)\,\frac{1}{2n+2}}$

Zauważmy, że miejsca zerowe $p_{n+1}(x)$ są miejscami zerowymi $T_{n+1}(x)$ ale przemnożonymi przez 2, zatem

$$2^n p_{n+1}(x) = \cancel{4}\, T_{n+1}\left(\tfrac{1}{2}x\right).$$

Stąd
$$R_n(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{1}{2^n} \underbrace{T_{n+1}\left(\tfrac{1}{2}x\right)}_{\leq 1} \right| \leq$$

$$\leq \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{(n+1)!\,2^n} = \frac{1}{6^n (n+1)!}$$

Dla $n = 3$ mamy $\frac{1}{6^n(n+1)!} \leq 2 \cdot 10^{-3}$