(b) Niech $f\colon R^2 \to R$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{gdy} \quad (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad (x, y) = 0. \end{cases}$$

Pokazać, że f jest różniczkowalna także w punkcie $(0, 0)$, ale $D_i f$ nie są ciągłe w $(0, 0)$.

2.33. Pokazać, że z założeń twierdzenia 2.8 można wyeliminować ciągłość $D_1 f^j$ w a.

2.34. Funkcja $f\colon R^n \to R$ jest *jednorodna* stopnia m, jeżeli $f(tx) = t^m f(x)$ dla wszystkich $x \in R^n$ i $t \in R$. Pokazać, że jeżeli f jest także różniczkowalna, to

$$\sum_{i=1}^{n} x^i D_i f(x) = m f(x).$$

Wskazówka. Znaleźć $g'(1)$ dla $g(t) = f(tx)$.

2.35. Dowieść, że jeżeli $f\colon R^n \to R$ jest różniczkowalna i $f(0) = 0$, to istnieją takie $g_i\colon R^n \to R$, że

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x).$$

Wskazówka. Jeżeli $h_x(t) = f(tx)$, to $f(x) = \int_0^1 h_x'(t)\,dt$.

Funkcje odwrotne

Przypuśćmy, że $f\colon R \to R$ ma ciągłą pochodną na zbiorze otwartym zawierającym a i $f'(a) \neq 0$. Jeżeli $f'(a) > 0$, to istnieje taki odcinek otwarty V zawierający a, że $f'(x) > 0$ dla $x \in V$ (a dla $f'(a) < 0$ mielibyśmy $f'(x) < 0$). Zatem f rośnie (lub maleje) na V, więc jest 1-1 i dlatego ma funkcję odwrotną f^{-1} określoną na pewnym odcinku otwartym W zawierającym $f(a)$. Ponadto można łatwo pokazać, że f^{-1} jest różniczkowalna i że dla $y \in W$ zachodzi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

wszyst. poch. cząstkowe

Analogiczne rozumowanie dla wyższych wymiarów jest o wiele bardziej skomplikowane, lecz jego wynik (twierdzenie 2.11) jest bardzo ważny. Zaczniemy od prostego lematu.

2.10. Lemat. *Niech $A \subset R^n$ będzie przedziałem i niech $f\colon A \to R^n$ ma ciągłą pochodną. Jeżeli istnieje taka liczba M, że $|D_j f^i(x)| \leqslant M$ dla wszystkich x z wnętrza A, to*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant n^2 M |x - y|$$

dla wszystkich $x, y \in A$.

Dowód. Mamy

$$f^i(y) - f^i(x) = \sum_{j=1}^{n} [f^i(y^1, \ldots, y^j, x^{j+1}, \ldots, x^n) - $$
$$ - f^i(y^1, \ldots, y^{j-1}, x^j, \ldots, x^n)].$$

Stosując twierdzenie o wartości średniej otrzymujemy

$$f^i(y^1, \ldots, y^j, x^{j+1}, \ldots, x^n) -$$
$$- f^i(y^1, \ldots, y^{j-1}, x^j, \ldots, x^n) = (y^j - x^j) \cdot D_j f^i(z_{ij})$$

dla pewnych z_{ij}. Wartość bezwzględna wyrażenia z prawej strony jest mniejsza lub równa $M \cdot |y^j - x^j|$. Tak więc

$$|f^i(y) - f^i(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |y^j - x^j| \cdot M \leqslant nM|y - x|,$$

ponieważ dla każdego j mamy $|y^j - x^j| \leqslant |y - x|$. W końcu

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f^i(y) - f^i(x)| \leqslant n^2 M \cdot |y - x|. \blacksquare$$

2.11. Twierdzenie (o funkcji odwrotnej). *Załóżmy, że $f\colon R^n \to R^n$ ma ciągłą pochodną na zbiorze otwartym zawierającym a oraz $\det f'(a) \neq 0$. Wtedy istnieją zbiór otwarty V zawierający a i zbiór otwarty W zawierający $f(a)$ takie, że $f\colon V \to W$ ma ciągłą funkcję odwrotną $f^{-1}\colon W \to V$, która jest różniczkowalna i dla wszystkich $y \in W$ spełnia*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

Dowód. Niech λ będzie odwzorowaniem liniowym $Df(a)$. Wtedy λ jest odwracalne, ponieważ $\det f'(a) \neq 0$. A więc $D(\lambda^{-1} \circ f)(a) = D(\lambda^{-1})(f(a)) \circ Df(a) = \lambda^{-1} \circ Df(a)$ jest odwzorowaniem liniowym identycznościowym. Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla $\lambda^{-1} \circ f$, to jest oczywiście prawdziwe dla f. Dlatego możemy od razu założyć, że λ jest identycznością. Tak więc, jeśli tylko $f(a+h) = f(a)$, to mamy

Nie zakł., że $\lambda = I$

$\|\lambda^{-1}\| = 1/\alpha$

$$\frac{|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)|}{|h|} = \frac{|h|}{|h|} = 1.$$

$\forall_x \ |\lambda(x)| \geq \alpha|x|$

Ale

$\frac{|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)|}{|h|} = \frac{|\lambda(h)|}{|h|} \geq \frac{\alpha|h|}{|h|} = \alpha$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)|}{|h|} = 0.$$

Znaczy to, że nie może zachodzić $f(x) = f(a)$ dla x dowolnie bliskiego, lecz różnego od a. Dlatego istnieje taki przedział domknięty U zawierający a w swoim wnętrzu, że

(1) $f(x) \neq f(a)$, jeżeli $x \in U$ i $x \neq a$.

Skoro f ma ciągłą pochodną na zbiorze otwartym zawierającym a, to możemy także założyć, że

bo jeśli f' ciągła to $\det f'(x)$ też ciągła

(2) $\det f'(x) \neq 0$ dla $x \in U$.

(3) $|D_j f^i(x) - D_j f^i(a)| < 1/2n^2$ dla wszystkich i, j oraz $x \in U$.

Zauważmy, że stosując (3) i lemat 2.10 do funkcji $g(x) = f(x) - x$ dostajemy

$$|f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)| \leq \tfrac{1}{2}|x_1 - x_2|$$

$D_j g^i(x) = D_j f^i(x) - 0$

$D_i g^i(x) = D_i g^i(x) - 1$

dla $x_1, x_2 \in U$. Ponieważ

$$|x_1 - x_2| - |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)| \leq \tfrac{1}{2}|x_1 - x_2|,$$

$|D_j g^i(x) - D_j g^i(a)| < 1/2n^2$

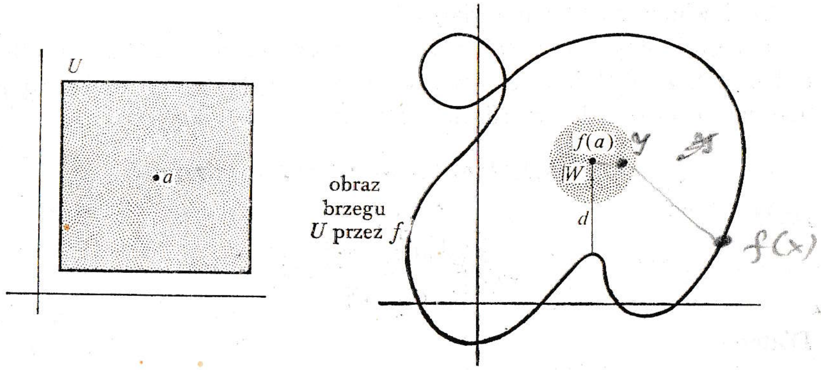
więc otrzymujemy

(4) $|x_1 - x_2| \leq 2|f(x_1) - f(x_2)|$ dla $x_1, x_2 \in U$.

$M = \frac{1}{2n^2}$ (z lem. 2.10)

Obraz brzegu U przez f jest więc zbiorem zwartym, który na mocy (1) nie zawiera $f(a)$ (rysunek 2.3).

$g(x) = f(x) - f'(a)(x)$



Rys. 2.3

Dlatego istnieje taka liczba $d > 0$, że $|f(a) - f(x)| \geq d$ dla x z brzegu U. Niech $W = \{y: |y - f(a)| < \frac{1}{2}d\}$. Jeżeli $y \in W$ i x należy do brzegu U, to

(5) $|y - f(a)| < |y - f(x)|$.

Pokażemy, że dla każdego $y \in W$ istnieje dokładnie jeden taki punkt x z wnętrza U, że $f(x) = y$. Aby tego dowieść, rozważmy funkcję $g: U \to R$ określoną wzorem

$$g(x) = |y - f(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y^i - f^i(x))^2.$$

Funkcja ta jest ciągła i dlatego przyjmuje minimum na U. Na mocy (5) dla x z brzegu U mamy $g(a) < g(x)$. Dlatego g nie przyjmuje minimum na brzegu U. Z twierdzenia 2.6 wynika istnienie takiego punktu x z wnętrza U, że $D_j g(x) = 0$ dla wszystkich j, to znaczy

$$\sum_{i=1}^{n} 2(y^i - f^i(x)) \cdot D_j f^i(x) = 0 \quad \text{dla wszystkich } j.$$

bo mamy równą zero kombinację liniową wierszy

Na mocy (2) macierz $(D_j f^i(x))$ ma niezerowy wyznacznik. Dlatego musi zachodzić $y^i - f^i(x) = 0$ dla wszystkich i, czyli $y = f(x)$. Dowodzi to istnienia x. Jego jedyność wynika natychmiast z (4).

Niech V będzie przekrojem wnętrza U z $f^{-1}(W)$. Pokazaliśmy, że funkcja $f: V \to W$ ma funkcję odwrotną $f^{-1}: W \to V$. Możemy zapisać (4) inaczej:

(6) $|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \leq 2|y_1 - y_2|$ dla $y_1, y_2 \in W$.

Stąd widać, że f^{-1} jest ciągła.

Pozostaje jedynie dowieść, że f^{-1} jest różniczkowalna. Niech $\mu = Df(x)$. Pokażemy, że f^{-1} jest różniczkowalna w $y = f(x)$ i ma pochodną μ^{-1}. Tak jak w dowodzie twierdzenia 2.2 dla $x_1 \in V$ mamy

$$f(x_1) = f(x) + \mu(x_1 - x) + \varphi(x_1 - x),$$

gdzie

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{|\varphi(x_1 - x)|}{|x_1 - x|} = 0.$$

Dlatego

$$\mu^{-1}(f(x_1) - f(x)) = x_1 - x + \mu^{-1}(\varphi(x_1 - x)).$$

Ponieważ każdy $y_1 \in W$ jest postaci $f(x_1)$ dla pewnego $x_1 \in V$, więc można to zapisać następująco:

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y) + \mu^{-1}(y_1 - y) - \mu^{-1}(\varphi[f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)]),$$

i dlatego wystarczy pokazać, że

$$\lim_{y_1 \to y} \frac{|\mu^{-1}(\varphi[f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)])|}{|y_1 - y|} = 0.$$

W tym celu (zadanie 1.10) wystarczy pokazać, że

$$\lim_{y_1 \to y} \frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|y_1 - y|} = 0.$$

Ale

$$\frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|y_1 - y|} = \frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|} \cdot \frac{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|}{|y_1 - y|}.$$

Ponieważ f^{-1} jest ciągła, więc $f^{-1}(y_1) \to f^{-1}(y)$, gdy $y_1 \to y$. Dlatego pierwszy czynnik dąży do 0. Ponieważ, na mocy (6), drugi czynnik jest mniejszy niż 2, więc ich iloczyn także dąży do 0. ■

Zauważmy, że ze wzoru na pochodną funkcji f^{-1} wynika, że pochodna ta jest w istocie ciągła (i jeśli f jest klasy C^∞ to f^{-1} też jest klasy C^∞). Rzeczywiście, wystarczy zauważyć, że wyrazy macierzy odwrotnej do macierzy A to funkcje klasy C^∞ zmiennych, będących wyrazami macierzy A.

Wynika to ze wzorów Cramera: $(A^{-1})_{ji} = (\det A^{ij})/(\det A)$, gdzie A^{ij} jest macierzą otrzymaną z A przez usunięcie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Warto też zauważyć, że funkcja odwrotna f^{-1} może istnieć nawet jeśli $\det f'(a) = 0$. Na przykład, jeżeli $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest określona jako $f(x) = x^3$, to $f'(0) = 0$, ale f ma funkcję odwrotną $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Niemniej jedno jest pewne: jeśli $\det f'(a) = 0$, to f^{-1} nie może być różniczkowalna w $f(a)$. Aby tego dowieść, zauważmy, że $(f \circ f^{-1})(x) = x$. Gdyby f^{-1} była różniczkowalna w $f(a)$, to zasada różniczkowania funkcji złożonej dawałaby $f'(a) \cdot (f^{-1})'(f(a)) = I$, skąd mielibyśmy $\det f'(a) \cdot \det (f^{-1})'(f(a)) = 1$, co zaprzecza temu, że $\det f'(a) = 0$.

Zadania

2.36*. Niech $A \subset \mathbf{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ funkcją 1-1 mającą ciągłą pochodną taką, że $\det f'(x) \neq 0$ dla wszystkich x. Pokazać, że $f(A)$ jest zbiorem otwartym i $f^{-1}\colon f(A) \to A$ jest różniczkowalna. Pokazać także, że $f(B)$ jest otwarty dla każdego zbioru otwartego $B \subset A$.

2.37. (a) Niech funkcja $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ ma ciągłą pochodną. Pokazać, że f nie jest 1-1.

Wskazówka. Jeżeli na przykład $D_1 f(x, y) \neq 0$ dla wszystkich (x, y) z pewnego zbioru otwartego A, to rozważmy $g\colon A \to \mathbf{R}^2$ określoną jako $g(x, y) = (f(x, y), y)$.

(b) Uogólnić ten wynik na przypadek funkcji mającej ciągłą pochodną $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, gdzie $m < n$.

2.38. (a) Pokazać, że jeżeli $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełnia $f'(a) \neq 0$ dla wszystkich $a \in \mathbf{R}$, to f jest 1-1 (na całej $\mathbf{R}$).

(b) Określmy $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ wzorem $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Pokazać, że $\det f'(x, y) \neq 0$ dla wszystkich (x, y), lecz f nie jest 1-1.

2.39. Wykorzystać funkcję $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{gdy} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad x = 0, \end{cases}$$

by pokazać, że z założeń twierdzenia 2.11 nie można wyeliminować ciągłości pochodnej.